Berechnungsformeln der Hydrostatik

Hydrostatik ist die Lehre vom ruhenden Fluid. Damit ein Fluid in Ruhe sein kann, muß seine Umgebung Druckkräfte aufbringen, die der Volumenkraft auf das Fluid – im folgenden ist das immer nur die Gewichtskraft - entgegenwirken. Man denke zum Beispiel an ein Aquarium. Durch das Gewicht seines Wasserinhalts werden hohe Druckkräfte hervorgerufen, denen seine Wände standhalten müssen.

Stellt man aber das Aquarium auf den Boden eines Schwimmbeckens, herrscht an seiner Außenseite nicht mehr der Luftdruck, sondern der gleiche Druck wie im Inneren. Auf die Wände wirken dann keine resultierenden Druckkräfte mehr. Man kann sich die Wände sogar wegdenken, und das Fluid im Inneren bliebe dennoch in Ruhe.

Was man sich aber nicht wegdenken kann, ist der Boden des Schwimmbeckens. Er muß hohe Druckkräfte aufnehmen. An der Oberfläche des Schwimmbeckens herrscht hingegen der kleinere Luftdruck. Von der Oberfläche bis zum Boden muß also eine ständige Druckänderung bestehen. Diese Druckänderung gibt es nur in der Höhenrichtung z. In den beiden anderen Richtungen, x und y, ändert sich der Druck nicht.

Eulersches Grundgesetz der Hydrostatik im Schwerefeld

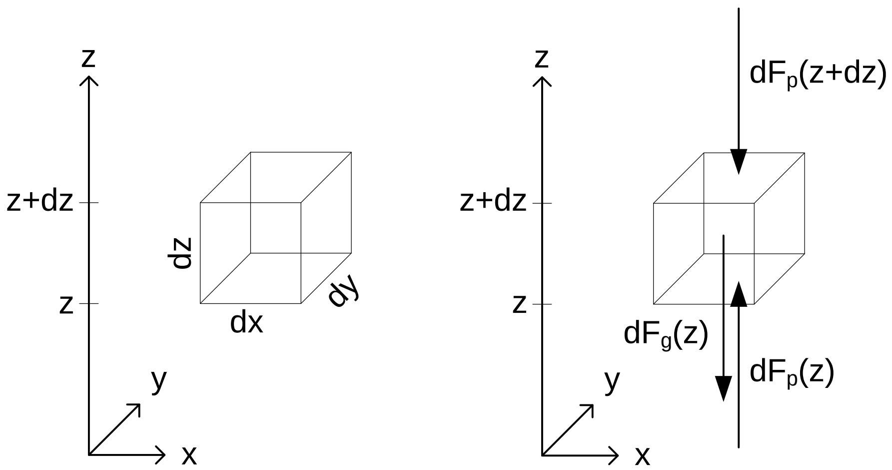

Bild 1: Kräftegleichgewicht an einem infinitesimal kleinen Quader in einem ruhenden Fluid

Bild 1 zeigt als Ausschnitt aus einem ruhenden Fluid einen Quader mit den unendlich kleinen Seitenlängen dx, dy und dz. Weil er unendlich klein ist, wirken auf den Quader unendlich kleine Kräfte dF. Rechts ist das Kräftegleichgewicht zu sehen. Die Druckkräfte in x- und in y-Richtung gleichen sich aus und sind hier gar nicht erst eingezeichnet.

In der Höhenrichtung z diktiert die Gewichtskraft das Geschehen. Sie wird ganz allgemein mit $dF_g(z)$ bezeichnet; damit ist nicht ausgeschlossen, daß sie auch von der Höhe z unabhängig sein kann. Ihr entgegen wirkt die Druckkraft $dF_p(z)$ an der Unterseite des Quaders. Sie muß nicht nur die Gewichtskraft ausgleichen, sondern auch die Druckkraft $dF_p(z + dz)$, welche auf die Oberseite des Quaders wirkt.

Beteiligt sind $\rho\ g$ als die Kraftdichte der Gewichtskraft dF_g und der Druck p als die Flächendichte der Druckkraft dF_p. In kompressiblen Fluiden ist nicht nur der Druck von der Höhe z abhängig, sondern auch die Dichte; sie wird im folgenden $\rho(z)$ geschrieben.

Die interessierende Größe ist die Druckänderung $-p'(z)$. In der Schreibweise von Leibniz erscheint sie als $-\frac{dp}{dz}$. Das Minuszeichen rührt aus der Orientierung der z-Achse her. Weil sie nach oben zeigt, der Druck aber nach unten hin wächst, also nach oben hin abnimmt, ist die Druckänderung negativ. Nun wieder zurück zur Gleichgewichtsbetrachtung.

Für die Gewichtskraft gilt Im Schwerefeld

(1) $dF_g(\mathrm{z}) = \rho(z)\ g\ dx\ dy\ dz.$

Für die beiden Druckkräfte dF_p gilt

(2) $dF_p(\mathrm{z}) = p(z)dx\ dy$

an der Unterseite und

(3) $dF_p(\mathrm{z+dz}) = p(z+dz)dx\ dy$

an der Oberseite. Obwohl sie beide unendlich klein sind, läßt sich sagen, daß $dF_p(\mathrm{z})$ noch kleiner als $dF_p(\mathrm{z+dz})$ ist. Aus dem Kräftegleichgewicht ergibt sich

(4) $dF_p(\mathrm{z}) - dF_p(\mathrm{z+dz}) - dF_g(\mathrm{z}) = p(z)dx\ dy - p(z+dz)dx\ dy - \rho(z)\ g\ dx\ dy\ dz = 0$

und, nach Kürzung von $dx\ dy$,

(5) $p(z) - p(z+dz) - \rho(z)\ g\ dz = 0\ .$

Der Anteil der Gewichtskraft wird jetzt noch auf die rechte Seite gebracht und die ganze Gleichung durch dz geteilt. Es entsteht

(6) $\frac{p(z+dz)-p(z)}{dz} = -\rho(z)\ g\ .$

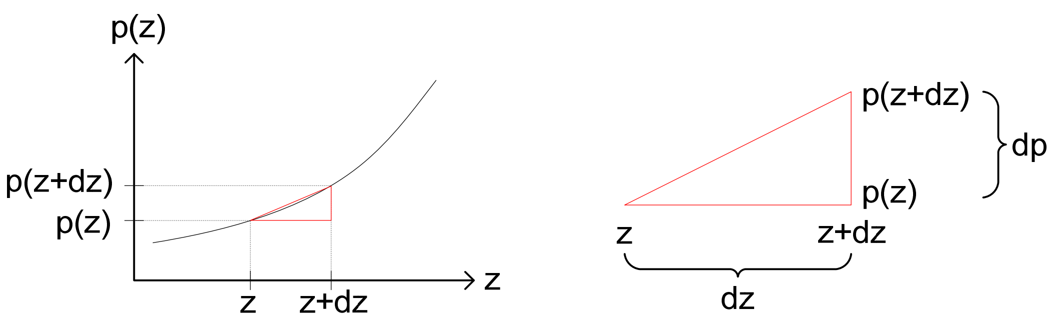

Bild 2: Differentiation des Druckverlaufs am Punkt z

Bild 2 zeigt die Bedeutung des Quotienten auf der linken Seite von Gleichung 6. Weil dz unendlich klein ist, gibt er die Steigung der Funktion p im Punkt z an. Weil er das für beliebiges z leistet, ist er selbst eine Funktion, nämlich die Funktion $p'(z)$, welche die 1. Ableitung von $p(z)$ ergibt. Das ist die gesuchte Druckänderung. Rechst in Bild 2 erkennt man noch den Sinn der Schreibweise von Leibniz.

Die beiden Funktionswerte von p bilden eine unendlich kleine Differenz dp. Sie wird Differential oder Zuwachs von p genannt. dp/dz bildet einen Differentialquotienten, der die Änderung des Drucks per Längeneinheit angibt.

Unter Verwendung der 1. Ableitung stellt sich Gleichung 6 dar als

(7) $-p'(z) = \rho(z)\, g$ oder in Leibnizscher Schreibweise: $-\frac{dp}{dz} = \rho(z)\, g.$

Das ist das Eulersche Grundgesetz der Hydrostatik im Schwerefeld. Es besagt, daß die Abnahme des Drucks mit der Höhe z im Schwerefeld durch die zugehörige Kraftdichte der Gewichtskraft bestimmt ist.

Das Eulersche Grundgesetz bildet ein Zwischenprodukt, das sich in zwei Richtungen spezialisieren läßt: in der Anwendung auf Gase und in der Anwendung auf Flüssigkeiten. Bei der Anwendung auf Gase, also für höhenabhängige Dichte, fällt auf, da der Druck in der Ruhe nur von der Dichte, nicht auch von der Temperatur abhängt. Strömungen, in denen der Druck nur von der Dichte abhängt, werden als barotrope Strömungen bezeichnet. In der Hydrostatik wird statt von barotroper Strömung besser von barotroper Schichtung gesprochen.

Barotrope Schichtung

Unter nicht allzu hohen Drücken genügen Gase und Gasgemische, auch die Luft, der Gleichung

(8) $\frac{p}{\rho} = R\, T$

des idealen Gases. Darin sind R die spezifische Gaskonstante und T die absolute Temperatur, sie wird als konstant angenommen. Damit sie in das Eulersche Grundgesetz Gleichung 7 eingesetzt werden kann, wird die ideale Gasgleichung noch nach ρ umgestellt und die Abhängigkeit von z berücksichtigt:

(9) $\rho(z) = \frac{1}{R\,T}\, p(z).$

Damit wird aus Gleichung 7

(10) $\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dz}} = -\frac{g}{R\,T}\, p(z).$

Das ist eine Differentialgleichung. Anders als bei einer algebraischen Gleichung, z.B. $2\,x = 4$, ist ihre Lösung kein Wert, sondern eine Funktion, hier eine Funktion $p(z)$ mit der Bildungsvorschrift

(11) $p(z) = C\, e^{-\frac{g}{RT}z}.$

Probe: $p'(z) = -C\,\frac{g}{RT}\, e^{-\frac{g}{RT}z}, -\frac{g}{R\,T}\, p(z) = -\frac{g}{R\,T}\, C\, e^{-\frac{g}{RT}z}$

C ist eine Konstante, die sich durch Anpassung an eine Randbedingung bestimmen läßt. Die Randbedingung ist ein gegebener Punkt des Funktionsverlaufs $p(z)$. Auf der Erde grenzt ein Gas nach unten hin vorwiegend an eine Flüssigkeit oder an einen Feststoff. Eine typische Begrenzung ist die Erdoberfläche. In der Luft herrscht dort der Druck p_0 (Bild 3).

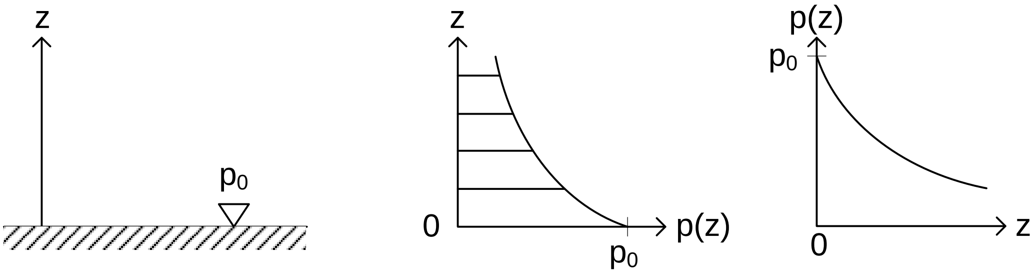

Bild 3: barotrope Schichtung

Es gilt also $p(z = 0) = p_0$. Das ist die Randbedingung. Sie wird in Gleichung 11 eingesetzt. Das bedeutet: Für z wird 0 und für $p(z)$ wird p_0 eingesetzt. Es entsteht

(12) $$p(0) = p_0 = C\,e^{-\frac{g}{RT}0} = C.$$

Damit ist C als p_0 bestimmt. Aus Gleichung 11 wird

(13) $$\boxed{p(\mathrm{z}) = p_0\,e^{-\frac{g}{RT}\mathrm{z}}.}$$

Das ist die allgemeine Beschreibung des Druckverlaufs eines ruhenden idealen Gases bei konstanter Temperatur. Bild 3 zeigt in der Mitte und rechts den Funktionsverlauf. Ganz ähnlich sieht der Verlauf der Dichte aus. Er ergibt sich nach Einsetzen von Gleichung 13 in Gleichung 9 zu

(14) $$\boxed{\rho(z) = \frac{p_0}{R\,T}\,e^{-\frac{g}{RT}\mathrm{z}}.}$$

Nach oben hin wird die Luft „dünn“. Eine interessante Frage ist die nach der Masse dm der Atmosphäre über einem unendlich kleinen Flächenstück dA der Erdoberfläche. Dazu muß man die Dichte über ein Volumen $dA\ h$ integrieren, bei dem h gegen unendlich strebt, also:

(15) $$dm = dA\ \lim_{h\to\infty}\int_0^h \rho(z)\ dz.$$

Die Stammfunktion von $\rho(z)$ nach Gleichung 14 ist $-\frac{p_0}{g}\ e^{-\frac{g}{RT}\mathrm{z}}$. Damit bestimmt sich dm zu

(16) $$dm = dA\left[-\frac{p_0}{g}\left(\lim_{h\to\infty} e^{-\frac{g}{RT}\mathrm{h}} - e^{-\frac{g}{RT}0}\right)\right] = dA\left[-\frac{p_0}{g}\ (0-1)\right] = dA\ \frac{p_0}{g}.$$

Auf einem Quadratmeter Erdoberfläche lastet mit den Durchschnittswerten p_0=103125 Pa und g=9,81 m/s² eine Masse von 1 m² 101325 kg/(m s²) / (9,81 m/s²), also von gut 10 Tonnen.

Kehrt man wieder zur unendlich kleinen Fläche dA zurück, berechnet sich die zugehörige Gewichtskraft dF_g zu

(17) $$dF_g = dm\ g = dA\,p_0.$$

Sie ist gleichbedeutend mit einer Druckkraft auf das Flächenstück. Der zugehörige Druck ist

(18) $$p = \frac{dF_g}{dA} = \frac{dA\,p_0}{dA} = p_0,$$

womit sich der Kreis schließt, denn an der Erdoberfläche wirkt auch voraussetzungsgemäß p_0.

Mithilfe von Gleichung 14 wird nun untersucht, wie hoch ein gasgefüllter Ballon unter folgenden Annahmen steigen kann: Die Masse des Ballons besteht allein aus dem Gas, die Lufttemperatur beträgt unabhängig von der Höhe 0°C, das Gas hat bei dieser Temperatur eine Dichte von 1,0 kg/m³. Die weiteren Daten sind 287 J/(kg K) für die Gaskonstante R der Luft, 9,81 m/s² für die Fallbeschleunigung g und 101.325 Pa für den Luftdruck p_0 am Erdboden.

Man überlegt sich leicht, daß der Ballon bis zu einer Höhe steigen muß, in der die Luft die gleiche Dichte hat wie das Gas im Ballon. Gleichung 14 muß also nach z umgestellt werden. Es ergibt sich:

(19) $z = -\frac{R\,T}{g}\ln\frac{\rho\,R\,T}{p_0}.$

Im Rechenbeispiel sind das -287 · 273,15/9,81 ln(1,0 · 287 · 273,15 / 101.325) m, also 2.050 m.

Die Luft bleibt auch barotrop geschichtet wenn man in Rechnung zieht, daß die Lufttemperatur, anders als in Gleichung 9 angenommen, nicht konstant ist. Bei der Bestimmung des Drucks und der Dichte in einer bestimmten Höhe z muß die Abkühlung der Lufttemperatur jedoch tatsächlich berücksichtigt werden. In der Fliegerei geschieht das mit einfachen linearen Ansätzen in der Art

(20) $T(z) = T_0 - c\,z.$

Darin ist c ein Faktor, der die Abkühlung in K/m angibt. Gleichung 13 wird mit $T(z)$ zu

(21) $p(\mathrm{z}) = p_0\ (R\,T_0)^{-\frac{g}{c\,R}}\,[R\,(T_0 - c\,z)]^{\frac{g}{c\,R}}.$

Hydrostatische Druckverteilung

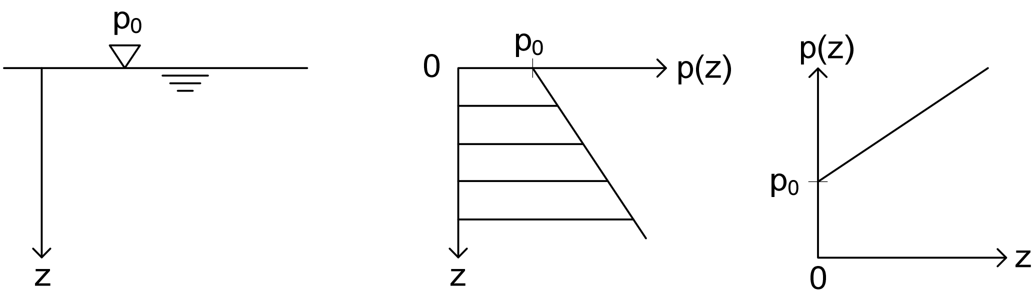

Bild 4: hydrostatische Druckverteilung

Flüssigkeiten können als inkompressibles Fluid behandelt werden. Auf der Erde grenzen Flüssigkeiten meist nach oben gegen ein Gas. Deswegen wird die z-Achse bei Flüssigkeiten umgekehrt (Bild 4 links). Damit kehrt sich auch das Vorzeichen der Eulerschen Grundgleichung (Gleichung 7) um:

(22) $p'(z) = \rho\,g.$

ρ ist hier nicht mehr von z abhängig. Die Lösung der Gleichung bekommt nun die einfache Form

(23) $p(z) = C + \rho\,g\,z.$

Probe: $p'(z) = \rho\,g.$

Mit der Randbedingung $p(z=0) = p_0$ bestimmt sich C nach

$$(24) \quad p(0) = p_0 = C + \rho\, g\, 0$$

zu p_0. Es entsteht

$$\boxed{(25) \quad p(z) = p_0 + \rho\, g\, z.}$$

Das ist die hydrostatische Druckverteilung.

Im Wasser entstehen wesentlich höhere Drücke als in der Luft. Als tiefste Stelle der Erde gilt der Marianengraben im westlichen Pazifik. Dort wurde eine Tiefe von 11.022 m gemessen. Rechnet man mit einer Dichte von 1000 kg/m³, gelangt man zu einem Druck von 1083 bar, der dort unten herrscht.

Auftrieb

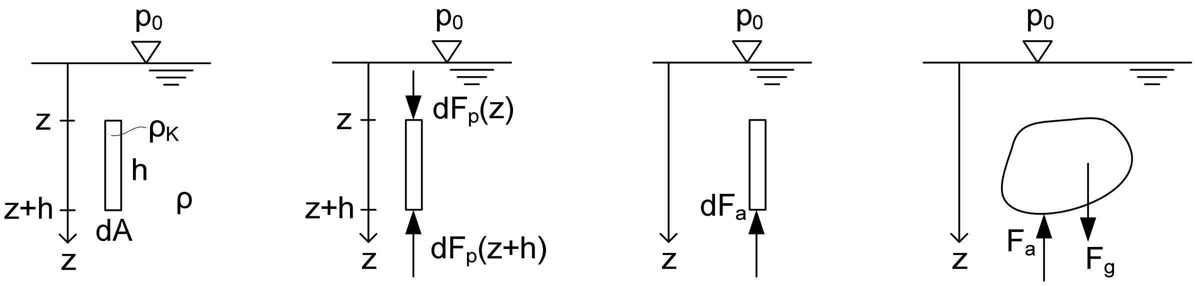

Bild 5: Auftrieb

Eine wichtige Konsequenz aus der hydrostatischen Druckverteilung ist der Auftrieb auf einen Körper (Index K). Dabei muß es sich nicht um einen Festkörper handeln. Es kann auch ein weiteres Fluid sein. In Bild 5 links ist der Körper als Quader mit der unendlich kleiner Grundfläche dA und Höhe h und Dichte ρ_K ausgebildet. Auf ihn wirken unendlich kleine Kräfte dF. Seitlich gleichen sich die Kräfte aus und werden gar nicht erst eingetragen. Die Druckkraft auf die Oberseite des Quaders errechnet sich mit Verwendung von Gleichung 15 zu

$$(26) \quad dF_p(z) = dA\, p(z) = dA\, (p_0 + \rho\, g\, z).$$

Die Druckkraft auf die Unterseite des Quaders ist

$$(27) \quad dF_p(z+h) = dA\, p(z+h) = dA\, (p_0 + \rho\, g\, (z+h)).$$

Daraus ergibt sich eine resultierende Kraft nach oben:

$$(28) \quad dF_A = \rho\, g\, h\, dA = \rho\, g\, dV.$$

Das ist die Auftriebskraft. $dA\, h$ ist gleich dem Volumen dV des Quaders. Die Auftriebskraft ist also eine Volumenkraft. Ihre Kraftdichte ist $\rho\, g$. Die Auftriebskraft F_a auf ein endliches Volumen V ergibt sich aus Integration der Kraftdichte über das Volumen als

$$(29) \quad F_a = \int_V \rho\, g\, dV = \rho\, g \int_V dV = \rho\, g\, V.$$

Die rechte Seite ergibt sich, weil ρ nach wie vor konstant ist. V ist ein Verdrängungsvolumen und $\rho\, g\, V$ das zugehörige Gewicht. Man beachte, daß ρ nicht die Dichte des Körpers, sondern die der Flüssigkeit ist. Es gilt daher der Satz: Der Auftrieb auf einen Körper ist gleich dem Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit.

Gegen die Auftriebskraft wirkt die Gewichtskraft F_g auf den Körper:

(30) $F_g = \rho_K \, g \, V.$

Auftriebs- und Gewichtskraft unterscheiden sich also nur in der Dichte. Es gibt drei Fälle:

$\rho_K < \rho$: Der Körper steigt nach oben.

$\rho_K = \rho$: Der Körper behält seine Lage bei.

$\rho_K > \rho$: Der Körper sinkt nach unten.