Druckverlust der laminaren Rohrströmung

Eine laminare Rohrströmung (auch Hagen-Poiseuille-Strömung genannt) liegt vor, wenn sich das Fluid in unendlich viele unendlich dünne konzentrische Hohlzylinder unterteilen läßt, die ständig gegeneinander verschoben werden. Im Arbeitsblatt „Integration von Ortsgrößen zu Bereichsgrößen“ wurde gezeigt, wie sich der Volumenstrom und die mittlere Fließgeschwindigkeit der laminaren Rohrströmung aus ihrem Geschwindigkeitsprofil durch Integration berechnen lassen. In diesem Arbeitsblatt wird gezeigt, wie das Geschwindigkeitsprofil zustande kommt und wie sich der Druckverlust berechnet.

Der Druckverlust ist eine Folge der Wandhaftung und der Reibung innerhalb des Fluids. In einer Rohrnetzberechnung wird aus der mittleren Fließgeschwindigkeit, dem Rohrdurchmesser und den Stoffwerten des Fluids ein Rohrreibungsgefälle R berechnet. Multipliziert mit der Länge L einer Leitung ergibt sich daraus ein Druckverlust Δp_{vL}.

Aus Sicht des Förderaggregats, vorzugsweise einer Pumpe, ist der Druckverlust einer Leitung gleichbedeutend mit dem Förderdruck, der ihr zur Verfügung gestellt werden muß. Am Beginn der Leitung steht noch der volle Förderdruck zur Verfügung. Am Ende ist er null. Dazwischen besteht eine gleichbleibende negative Druckänderung $-\,\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$. (Druckgradient). Genauso wie der Förderdruck den Druckverlust deckt, deckt der Druckgradient das Rohrreibungsgefälle. Örtlich betrachtet, ist er die treibende Kraft der Strömung.

Nach dem Gesagten gilt also

$$(1) \qquad R = \left(-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right).$$

Um das Rohrreibungsgefälle näher zu bestimmen, wird nun der Druckgradient $-\,\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ berechnet:

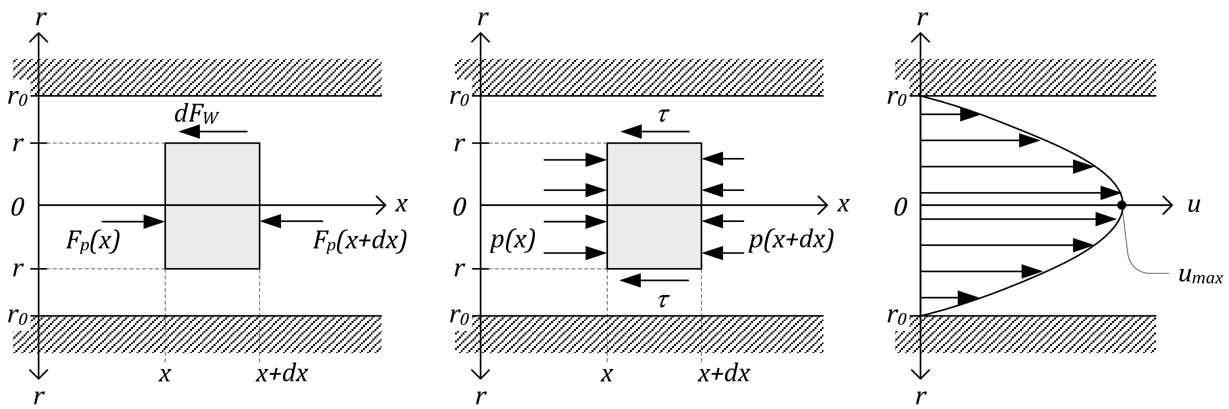

Bild 1: Kräftegleichgewicht (links, Mitte) und Geschwindigkeitsprofil (rechts)

Kräftegleichgewicht

Der Druckgradient geht aus einer Gleichgewichtsbetrachtung an einem bewegten Volumen im Inneren einer stationären Rohrströmung hervor. Das Volumen hat die Form eines unendlich kleinen Zylinders mit einer Höhe $\mathrm{d}x$ und einem Radius r. Der Radius läuft von 0 bis r_0, dem Rohrradius. Das Volumen wird durch die Bewegung deformiert. Alle Ortsgrößen, auch die Geschwindigkeit, bleiben in

Strömungsrichtung jedoch konstant. Deswegen müssen alle äußeren Kräfte, die an dem Volumen angreifen, zusammen null ergeben.

Es gilt also

$$(2) \qquad F_p(x) = \mathrm{d}F_W + F_p(x+dx) \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{d}F_W = F_p(x) - F_p(x+dx).$$

Die einzelnen Kräfte bestimmen sich zu

$$(3) \qquad \mathrm{d}F_W = 2\,r\,\pi\,\mathrm{d}x\,\tau, \quad F_p(x) = r^2\pi\,p(x) \;\text{ und }\; F_p(x+dx) = r^2\pi\,p(x+\mathrm{d}x).$$

Darin sind $p(x)$ und $p(x+\mathrm{d}x)$ die Drücke an den Stirnflächen und τ die Schubspannung am Mantel des Zylinders. Das Fluid wird als als Newtonsches Fluid angenommen. Das bedeutet, daß es eine konstante dynamische Zähigkeit η hat. Für die Schubspannung gilt der lineare Zusammenhang

$$(4) \qquad \tau(r) = \eta\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}.$$

Wie man im Bild rechts erkennen kann, ist $\mathrm{d}u/\mathrm{d}r$ negativ, denn u wird mit größerem r kleiner. Die Kraft $\mathrm{d}F_W$ ist hingegen positiv, denn sie bremst das Fluidvolumen. Deswegen muß das Vorzeichen von $\mathrm{d}u/\mathrm{d}r$ vor dem Einsetzen in Gleichung 2 noch umgekehrt werden. Dadurch entsteht

$$(5) \qquad -2\,r\,\pi\,\mathrm{d}x\,\eta\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = r^2\pi\,p(x) - r^2\pi\,p(x+\mathrm{d}x).$$

Nach Division durch $(-2\,r\,\pi\,\mathrm{d}x\,\eta)$ wird daraus

$$(6) \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = \frac{r}{2\,\eta}\,\frac{p(x+\mathrm{d}x)-p(x)}{dx} = \frac{r}{2\,\eta}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\frac{r}{2\,\eta}\left(-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right).$$

Geschwindigkeitsprofil

Gleichung 5 bildet eine Differentialgleichung. Ihre allgemeine Lösung lautet

$$(7) \qquad u(r) = -\left(-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)\frac{r^2}{4\,\eta} + C.$$

Die Konstante C kann aus der Randbedingung für $r = r_0$, also aus der Randbedingung an der Rohrwand, bestimmt werden. Wegen der Wandhaftbedingung ist die Geschwindigkeit der Teilchen dort null. Es gilt also

$$(8) \qquad u(r_0) = -\left(-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)\frac{{r_0}^2}{4\,\eta} + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = \left(-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)\frac{{r_0}^2}{4\,\eta}.$$

Damit wird aus Gleichung 7

$$(9) \qquad u(r) = -\left(-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)\frac{r^2}{4\,\eta} + \left(-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)\frac{{r_0}^2}{4\,\eta}.$$

Diese Gleichung läßt sich umformen zu

$$(10) \qquad u(r) = \left(-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)\frac{{r_0}^2}{4\,\eta}\left[1 - \left(\frac{\mathrm{r}}{r_0}\right)^2\right].$$

Offensichtlich tritt die größte Geschwindigkeit u_{max} bei $r = 0$, also genau in der Mitte des Rohres, auf und lautet

$$(11)\quad u_{max} = \left(-\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{d}x}\right)\frac{{r_0}^2}{4\,\eta}.$$

Mit $\mathrm{u_{max}}$ läßt sich die Geschwindigkeit auch schreiben als

$$(12)\quad \mathrm{u(r)} = \left[1-\left(\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{r_0}}\right)^2\right]\mathrm{u_{max}}.$$

Dieser Verlauf entspricht dem rechts im Bild gezeigten Geschwindigkeitsprofil. Es ist parabelförmig. Die zugehörige mittlere Fließgeschwindigkeit c geht aus Integration von $u(r)$ über den Querschnitt und Division durch die Querschnittsfläche hervor. Der Rechengang ist im Arbeitsblatt „Integration von Ortsgrößen zu Bereichsgrößen“ gezeigt. Er ergibt, daß c genau die Hälfte von u_{max} ist. Mit Verwendung von Gleichung 10 bedeutet das

$$(13)\quad c = \left(-\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{d}x}\right)\frac{{r_0}^2}{8\,\eta} = \left(-\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{d}x}\right)\frac{D^2}{32\,\eta}.$$

Darin ist D der Rohrdurchmesser. Sein Quadrat ist das Vierfache des Quadrats des Radius.

Druckverlust

Gleichung 14 ergibt nach dem negativen Druckgradienten umgestellt, welcher zugleich das gesuchte Rohrreibungsgefälle ist,

$$(14)\quad \left(-\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{d}x}\right) = R = \frac{8\,\eta\,c}{{r_0}^2} = \frac{32\,\eta\,c}{D^2}.$$

Damit ist der Reibungsdruckverlust eines Rohres mit der Länge L

$$(15)\quad \Delta p_{vL} = L\,R = \frac{32\,\eta\,L\,c}{D^2}.$$

Der Druckverlust einer laminaren Strömung ist also proportional zur Geschwindigkeit. In einer turbulenten Rohrströmung ist der Druckverlust dagegen proportional zum Geschwindigkeitsquadrat. Ein allgemeiner Ansatz für den Rohrreibungsverlust, der auch für turbulente Strömungen verwendet wird, ist

$$(16)\quad \Delta p_{vL} = \lambda\frac{L}{D}\frac{\rho}{2}\,\mathrm{c}^2.$$

Darin ist λ der sogenannte Rohrreibungskoeffizient. Für turbulente Strömungen errechnet er sich nach der Formel von Colebrook/Wright. Im Moody-Diagramm findet man sie ausgewertet. Der Rohrreibungskoeffizient für die laminare Rohrströmung geht durch Gleichsetzen von Gleichung 15 und 16 hervor. Es ergibt sich

$$(17)\quad \lambda = \frac{64\,\eta}{\rho\,c\,D} = \frac{64}{Re}.$$

Darin ist η/ρ die kinematische Viskosität ν. Der Quotient $c\,D/\nu$ ist die Reynoldszahl Re. In dieser Form kann λ in Gleichung 16 verwendet werden, wodurch sich eine einheitliche Rechnungsweise für den Druckverlust gerader Rohrlängen ergibt.