

## Impulssatz

### Trägheitsprinzip

Die Gleichungen der Strömungslehre gehen auf die klassische Mechanik von Isaac Newton zurück. In seinen „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica“ (Mathematische Grundlagen der Naturwissenschaft) aus dem Jahr 1687 gab Newton drei Erfahrungstatsachen, aus denen sich nützliche Schlußfolgerungen ziehen lassen, sog. Axiome, an. Dabei stand ursprünglich die Anwendung auf Festkörper im Vordergrund. Aber auch Flüssigkeiten und Gase gehorchen den gleichen Prinzipien.

Das erste Axiom lautet: „Ein Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, solange die Summe aller auf ihn einwirkenden Kräfte null ist.“ Dieses Axiom wird Trägheitsprinzip genannt. Bild 1 verdeutlicht es anhand eines Festkörpers.

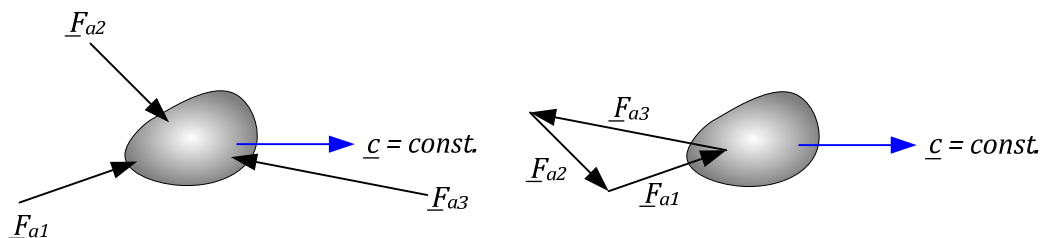


Bild 1: Trägheitsprinzip

Die mathematische Formulierung des Trägheitsprinzips ist

$$(1) \quad \sum \underline{F}_a = 0 \Leftrightarrow \underline{c} = \text{const.}$$

Darin ist  $\sum \underline{F}_a$  die Summe aller äußeren Kräfte (Bild 1 links). „Einwirkend“ bedeutet, daß sie auf den Körper, genauer: auf seinen Schwerpunkt, gerichtet sind. Ihre Resultierende  $\underline{F}$  (Bild 1 rechts) ist der Nullvektor (resultierende Kräfte werden mit Doppellinie gezeichnet).  $\underline{c} = \text{const}$  bedeutet, daß der Geschwindigkeitsvektor des Körpers einen konstanten Betrag und eine konstante Richtung hat („gleichförmige, geradlinige Bewegung“) oder der Nullvektor ist („Ruhe“).

Gleichung 1 kennt man auch als Kräftegleichgewicht und verbindet das häufig nur mit einem Zustand der Ruhe. Tatsächlich gilt das Kräftegleichgewicht ebenso bei konstanter Geschwindigkeit. Für die Strömungslehre bedeutet das, daß sich das Trägheitsprinzip nicht nur in der Hydrostatik, also auf Fluide in Ruhe, anwenden läßt, sondern auch auf Strömungen.

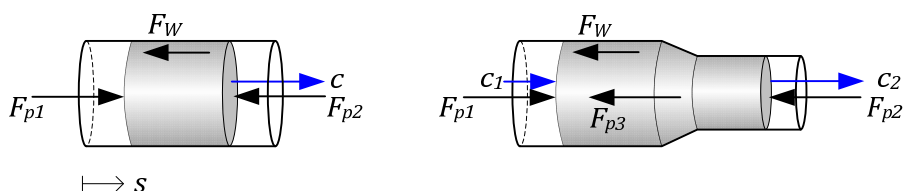


Bild 2: Anwendung des Trägheitsprinzips auf eine Strömung, links zulässig, rechts unzulässig

Bild 2 zeigt links ein bewegtes Fluidvolumen in einer Rohrströmung, seine mittlere Geschwindigkeit  $c$  und die auf ihn einwirkenden Kräfte. Die Resultierende der äußeren Kräfte in der Strömungsrichtung  $s$ ,  $F_{p1} - F_{p2} - F_w$ , muß nach Gleichung 1 null sein. Die Druckkraft  $F_{p1}$  muß also nicht nur die Druck-

kraft  $F_{p2}$ , sondern auch die Wandreibungskraft  $F_W$  ausgleichen, damit sich das Fluidvolumen mit einer konstanten mittleren Fließgeschwindigkeit  $c$  durch die Rohrleitung bewegen kann. Die Kräftebeziehung  $F_{p1} = F_{p2} + F_W$  gilt nicht nur für das bewegte Fluidvolumen, sondern auch für den Rohrabschnitt, in dem es sich gerade befindet.

Rechts in Bild 2 ist als Rohrabschnitt eine Verjüngung gezeigt. In der Verjüngung kommt eine weitere Druckkraft hinzu. Ihre Koordinate in Strömungsrichtung ist  $-F_{p3}$ . Man könnte nun auf den Gedanken kommen, auch in diesem Fall eine Kräftebeziehung  $F_{p1} = F_{p3} + F_{p2} + F_W$  gemäß dem Trägheitsprinzip zu bilden. Aber das wäre falsch: Anders als in einem geraden Rohrstück besteht in der Verjüngung ein Geschwindigkeitsanstieg (Gradient). Damit ist die Bewegung nicht mehr gleichförmig, und das Trägheitsprinzip darf nicht angewendet werden. Dafür spielt es keine Rolle, ob die Strömung stationär ist oder nicht. Eine gleichförmige Bewegung ist also nicht etwa gleichbedeutend mit Stationarität.

Ein anderes Beispiel, auf das die Anwendung des Trägheitsprinzip nicht zulässig ist, ist die Strömung in einem Bogen. Wenn in Strömungsrichtung kein Gradient besteht, ist die Strömung durch den Bogen gleichförmig. Aber sie ist nicht geradlinig, es besteht eine Richtungsänderung. Wenn sich der Geschwindigkeitsbetrag örtlich ändert oder wenn sich die Bewegungsrichtung ändert, muß das zweite Newtonsche Axiom angewendet werden:

### Impulssatz

Die zweite Newtonsche Axiom lautet: „Die Änderung der Bewegung der Masse ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.“ Es wird Aktionsprinzip oder auch Impulssatz genannt.

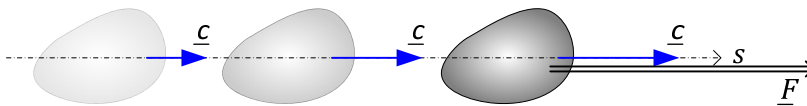


Bild 3: geradlinige Beschleunigung eines Körpers

Die „Bewegung der Masse“ ist ihr Impuls  $\underline{I} = m \underline{c}$ . Ihre „Änderung“ ist eine Impulsänderung  $\dot{\underline{I}}$ . Bei einer Rakete mit einer gleichförmigen, geradlinigen Geschwindigkeit  $\underline{c}$  ist für die Impulsänderung die Massenänderung aufgrund des Brennstoffverbrauchs verantwortlich. Bei Körpern mit konstanter Masse kann sich die Impulsänderung hingegen allein in einer Änderung der Geschwindigkeit äußern, also in einer Beschleunigung. Mit Verwendung des Formelzeichens  $\underline{a}$  für die Beschleunigung bekommt dann der Impulssatz die bekannte Form  $\underline{F} = m \underline{a}$ .

Darin ist  $\underline{F}$  die „bewegende Kraft“. Wenn mehrere äußere Kräfte auftreten handelt es sich um ihre Resultierende. Bild 3 zeigt ihre „Einwirkung“ auf einen Körper anhand einer geradlinigen Beschleunigung. Infolge der Krafteinwirkung bewegt sich der Körper nicht mehr gleichförmig. Ebenso gut könnte die Kraft quer zur Bewegungsrichtung des Körpers angreifen. Dann würde sich der Körper auch nicht mehr gleichförmig bewegen, sondern in „gerader Linie“ mit der Kraft seine Richtung ändern. In Bild 5 ändert sich hingegen in gerader Linie der Betrag der Geschwindigkeit.

Kraft und Impulsänderung sind „proportional“. Bei einer geradlinigen Bewegung betrifft die Proportionalität die Beträge von Kraft und Impulsänderung. Im SI-System sind die Einheiten so definiert, daß aus der Proportionalität eine Identität wird. Für geradlinige Bewegungen gilt:

$$(2) \quad F = \dot{I} = \frac{D(m c)}{D\tau}.$$

Darin ist  $D(m c)/D\tau$  als substantielle Änderung aufgeschrieben, weil es sich um eine Änderung handelt, die ein mitbewegter Beobachter feststellt. Bei konstanter Masse stellt der Beobachter eine substantielle Beschleunigung  $Dc/D\tau$  fest. Wenn mehrere äußere Kräfte wirken, bekommt Gleichung 2 die Form

$$(3) \quad \Sigma F_a = D(m c)/D\tau = \dot{I}.$$

Darin sind die verschiedenen  $F_a$  die Beträge, welche die Komponenten der äußeren Kräfte  $\underline{F}_a$  in Richtung der Resultierenden haben. In einer gleichförmigen, geradlinigen Bewegung wird der Körper nicht beschleunigt. Die rechte Seite ist dann null und aus Gleichung 3 ist dann eine Betragsform von Gleichung 1 geworden.

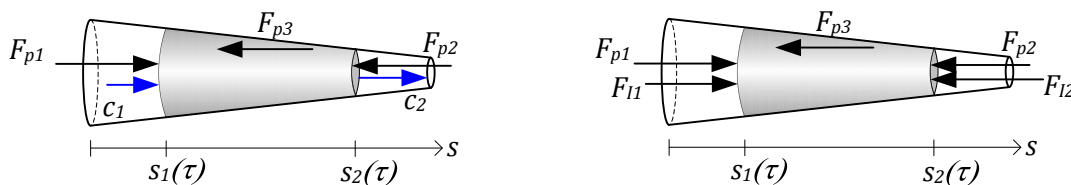


Bild 4: Kraftwirkung auf ein bewegtes Volumen eines reibungsfreien Fluids in einer Rohrströmung

Gleichung 3 soll nun auf ein bewegtes Fluidvolumen, wie es Bild 4 links zeigt, übertragen werden. Die Summe der äußeren Kräfte ist in diesem Beispiel  $F_{p1} - F_{p2} - F_{p3}$ , aber das ist hier nicht von weiterem Interesse. Stattdessen soll nun für die Impulsänderung  $\dot{I}$  des bewegten Fluidvolumens ein Rechenausdruck gefunden werden. Das Volumen bewegt sich, indem sich seine Grenzen  $s_1$  und  $s_2$  durch den Stromfaden bewegen. Die Impulsänderung des Volumens kann daher als

$$(4) \quad \dot{I} = \frac{d}{d\tau} \int_{s_1(\tau)}^{s_2(\tau)} \rho c A ds$$

beschrieben werden. Würde der Integrand ausschließlich aus der Querschnittsfläche  $A$  bestehen, wäre das Integral gleichbedeutend mit dem bewegten Volumen. Zusammen mit  $\rho$  wird daraus die Masse und in Verbindung mit  $c$  der Impuls des bewegten Volumens. Die Ortsgröße des Impulses ist demnach  $\rho c$ . Auf Gleichung 4 lässt sich das Transporttheorem für einfache Stromfäden anwenden (vgl. Arbeitsblatt „Transporttheorem“). Daraus entsteht:

$$(5) \quad \frac{d}{d\tau} \int_{s_1(\tau)}^{s_2(\tau)} \rho c A ds = \int_{s_1(\tau)}^{s_2(\tau)} \frac{\partial(\rho c A)}{\partial\tau} ds + \dot{V}_2 \rho_2 c_2 - \dot{V}_1 \rho_1 c_1.$$

Mit Einführung von Massenströmen  $\dot{m} = c A \rho = \dot{V} \rho$  wird daraus weiter:

$$(6) \quad \frac{d}{d\tau} \int_{s_1(\tau)}^{s_2(\tau)} \dot{m} ds = \int_{s_1(\tau)}^{s_2(\tau)} \frac{\partial\dot{m}}{\partial\tau} ds + \dot{m}_2 c_2 - \dot{m}_1 c_1.$$

Eingesetzt in Gleichung 3 liefert Gleichung 6

$$(7) \quad \int_{s_1(\tau)}^{s_2(\tau)} \frac{\partial\dot{m}}{\partial\tau} ds = \Sigma F_a + \dot{m}_1 c_1 - \dot{m}_2 c_2.$$

Unter stationären Bedingungen wird daraus

$$(8) \quad \sum F_a + \dot{m}_1 c_1 - \dot{m}_2 c_2 = 0.$$

Die Terme  $\dot{m}_1 c_1$  und  $\dot{m}_2 c_2$  haben also die Dimension einer Kraft. Im folgenden werden sie als Strömungskräfte bezeichnet. Rechts in Bild 4 sind sie als  $F_{I1} = \dot{m}_1 c_1$  und  $F_{I2} = \dot{m}_2 c_2$  eingetragen. Man erkennt, daß sie genauso wie Druckkräfte in Ansatz gebracht werden können.

Gleichung 8 hat die gleiche Form wie Gleichung 1. Unter stationären Bedingungen kann man also formal nach dem Trägheitsprinzip rechnen, wenn man die Strömungskräfte zusätzlich in Anrechnung bringt. Es schadet auch nicht, daß auch bei Gültigkeit des Trägheitsprinzip grundsätzlich so zu machen, denn die Strömungskräfte haben sich hinweg, wenn die Voraussetzungen des Trägheitsprinzips eingehalten sind. In Gleichung 8 wäre das bei konstanter Dichte und Geschwindigkeit der Fall.

Unter instationären Bedingungen gilt ganz allgemein:

$$(9) \quad \int_{s_1(\tau)}^{s_2(\tau)} \frac{\partial \dot{m}}{\partial \tau} ds = \sum F_a + \sum F_I.$$

Von den beteiligten Kräften in Bild 4 ist die Kraft auf die Mantelfläche in Strömungsrichtung, hier  $F_{p3}$ , am schwierigsten zu berechnen. Sie bildet die eigentliche Lösung von Gleichung 9. Ein Beispiel: Der Rohrdurchmesser im Querschnitt 1 sei  $d_1 = 40$  mm und im Querschnitt 2  $d_2 = 20$  mm.  $c_1$  sei 1 m/s,  $p_1$  und  $p_2$  seien 100 mbar und 99 mbar. Das Fluid sei inkompressibel und habe eine konstante Dichte von  $1000 \text{ kg/m}^3$ .

Aus der Kontinuitätsgleichung ergibt sich  $c_2 = 4$  m/s. Der Massenstrom ist mit den Daten am Eintrittsquerschnitt  $1 \text{ m/s } 1000 \text{ kg/m}^3 (0,04 \text{ m})^2 \pi/4 = 1,26 \text{ kg/s}$ . Daraus ergibt sich für die beiden Impulsströme  $1 \text{ m/s } 1,26 \text{ kg/s} = 1,26 \text{ N}$  und  $4 \text{ m/s } 1,26 \text{ kg/s} = 5,03 \text{ N}$ . Die beiden Druckkräfte errechnen sich zu  $10.000 \text{ N/m}^2 (0,04 \text{ m})^2 \pi/4 = 12,57 \text{ N}$  und  $9.900 \text{ N/m}^2 (0,02 \text{ m})^2 \pi/4 = 3,11 \text{ N}$ . Daraus ergibt sich eine Mantelkraft von  $5,69 \text{ N}$  in Strömungsrichtung.

Ganz ähnlich ließe sich auch die Mantelkraft in einem Bogen berechnen. Weil die Mantelkraft eine Größe von besonderem Interesse ist, wird der Impulssatz bei Stromröhren häufig in die Form

$$(10) \quad \int_{s_1(\tau)}^{s_2(\tau)} \frac{\partial \dot{m}}{\partial \tau} ds = F_M + \sum F_a + \sum F_I.$$

geschrieben. Darin ist die Mantelkraft  $F_M$  aus der Summe der übrigen äußeren Kräfte herausgeführt. Statt der Mantelkraft wird meistens ihre Gegenkraft  $R_W = -F_M$  verwendet. Das ist die Reaktionskraft, die das Fluid auf eine Wand, z.B. eine Rohrwand, ausübt. Mit Verwendung von  $R_W$  wird Gleichung 10 zu

$$(11) \quad R_W = \sum F_a + \sum F_I - \int_{s_1(\tau)}^{s_2(\tau)} \frac{\partial \dot{m}}{\partial \tau} ds.$$

Für stationäre Strömungen wird daraus

$$(12) \quad R_W = \sum F_a + \sum F_I.$$

## Volumen einer Fontäne

Quelle: Schade/Kunz: Strömungslehre, Berlin/New York 2007

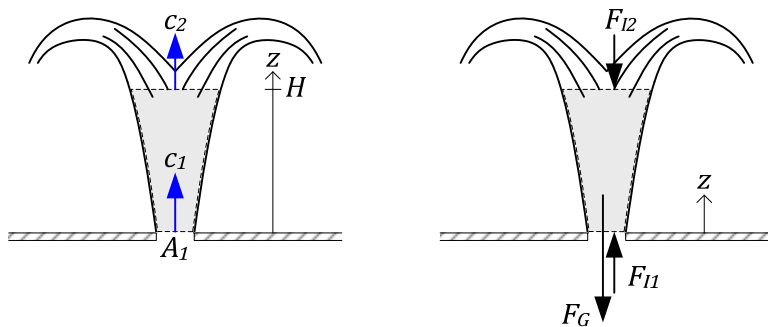


Bild 5: Impulssatz an einer Fontäne

Es soll nun das Volumen einer Wasserfontäne, die mit einer konstanten Geschwindigkeit  $c_1$  einem Querschnitt  $A_1$  austritt, bis zu einer Höhe  $H$  berechnet werden.  $H$  kann beliebige Werte zwischen null und der Scheitelhöhe der Fontäne annehmen.

Weil  $c_1$  konstant ist, kommt der Impulssatz in der Form  $R_W = \sum F_a + \sum F_l$  (Gleichung 12) zur Anwendung. Darin ist  $R_W$  in diesem Fall aber null. Auf den Mantel wirkt weder eine signifikante Reibungskraft noch eine signifikante Druckkraft. Ebenso können die Druckkräfte an den beiden Querschnitten vernachlässigt werden. Auch hier wirkt nur der Umgebungsdruck.

Als anzusetzende Kräfte verbleiben dann nur noch die beiden Strömungskräfte  $F_{I1}$  und  $F_{I2}$  und die Gewichtskraft  $F_G$ . Aus Gleichung 12 wird so in  $z$ -Richtung:

$$(13) \quad 0 = F_{I1} - F_{I2} - F_G = \dot{m}(c_1 - c_2) - m g = \rho A_1 c_1 (c_1 - c_2) - \rho V g.$$

Darin ist  $V$  gesucht und bis auf  $c_2$  alles andere gegeben. Auf der Scheitelhöhe der Fontäne ist  $c_2$  null. Für alle anderen Werte von  $H$  geht  $c_2$  aus der Bernoulligleichung hervor. Es ergibt sich:

$$(14) \quad \frac{c_1^2}{2} = \frac{c_2^2}{2} + g H \Leftrightarrow c_2 = \sqrt{c_1^2 - 2 g H}.$$

Dies eingesetzt in Gleichung 13 ergibt nach  $V$  aufgelöst:

$$(15) \quad V = \frac{A_1 c_1^2}{g} (c_1 - c_2) = \frac{A_1 c_1^2}{g} \left( c_1 - \sqrt{c_1^2 - 2 g H} \right).$$

Speziell bis zum Scheitelpunkt ( $c_2 = 0$ ) hat die Fontäne das Volumen

$$(16) \quad V = \frac{A_1 c_1^2}{g}.$$

### Kraftübertragung auf angeströmte Flächen

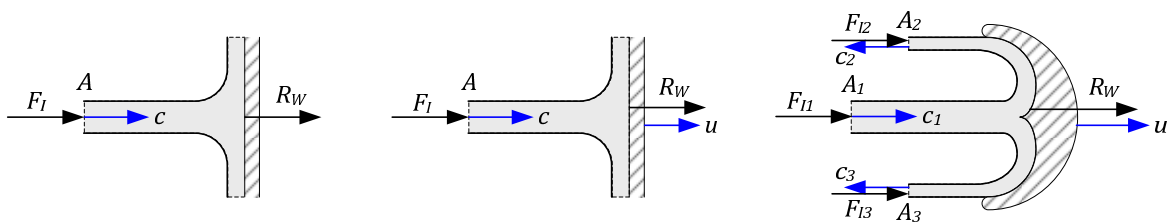


Bild 6: Strömungskräfte auf bewegte Flächen

Bild 6 zeigt links einen Strahl auf eine Platte im Querschnitt. Wie schon bei der Fontäne spielen Druck- und Reibungskräfte auf den Mantel und auf die Endflächen des Strahls keine Rolle. Auch die Gewichtskraft wird außer Betracht gelassen. In Richtung der Reaktionskraft auf die Platte wirkt lediglich die Strömungskraft des Strahls. Es gilt:

$$(17) \quad R_W = F_I = A \rho c^2.$$

Bild 6 Mitte zeigt den Fall, daß sich die Platte infolge der Anströmung mit einer Geschwindigkeit  $u$  bewegt. Diese Betrachtung ist raumfest. Ein mitbewegter Beobachter würde feststellen, daß das Fluid sich durch die Querschnittsfläche  $A$  mit einer Relativgeschwindigkeit  $c - u$  bewegt, die null wird, wenn sich die Platte genauso schnell bewegt wie das anströmende Fluid. Das Auftreten solcher Relativgeschwindigkeiten ist typisch für Strömungsmaschinen. Die Reaktionswandkraft ist nun

$$(18) \quad R_W = A \rho (c - u)^2.$$

Bild 6 rechts zeigt eine Schaufel aus einer Pelton-turbine. Durch ihre spezielle Form gibt es jetzt drei Strömungskräfte in Richtung der Reaktionswandkraft. Aufgrund der Kontinuitätsgleichung teilt sich der Massenstrom aus dem Hauptstrahl,  $A_1 \rho_1 (c_1 - u)$ , auf die beiden Teilstrahlen hälftig auf. Wenn man davon ausgeht, daß an allen drei Querschnitten die gleichen Drücke herrschen und die unterschiedlichen Höhenlagen vernachlässigt werden können, ist nach der Bernoulligleichung die Relativgeschwindigkeit durch alle drei Querschnitte die gleiche, nämlich  $c_1 - u$ . Daraus ergibt sich:

$$(19) \quad R_W = F_{I1} + F_{I2} + F_{I3} = A_1 \rho_1 (c_1 - u)^2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2 A_1 \rho_1 (c_1 - u)^2$$

Man erkennt: Bei Strömungsmaschinen spielt die Formgebung eine große Rolle. Allein durch die spezielle Formgebung der Schaufel ist die Reaktionswandkraft hier doppelt so hoch wie in Gleichung 18. Ferner erkennt man, wie schon in Gleichung 18, einen Zielkonflikt zwischen Geschwindigkeit und Kraftübertragung: Je höher die Geschwindigkeit ist, desto geringer ist die übertragene Kraft.

### Borda-Carnotscher Stoßverlust

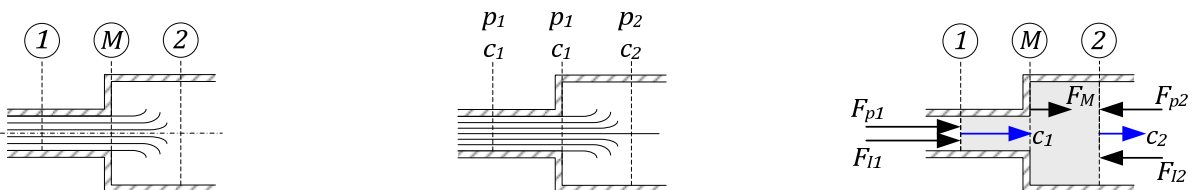


Bild 7: Borda-Carnotscher Stoßverlust

Bild 7 zeigt als weiteres Beispiel für die Anwendung des Impulssatzes den Druckverlust aufgrund einer plötzlichen Erweiterung des Querschnitts in einer Rohrströmung (Borda-Carnotscher

Stoßverlust). Gesucht ist die Druckdifferenz zwischen den Querschnitten 1 und 2. Am Eintritt M in den größeren Querschnitt haben Druck und Geschwindigkeit noch die gleichen Werte wie im Querschnitt 1 (Bild 7 Mitte).

Dort wirkt auch eine Mantelkraft in Strömungsrichtung. Bild 5 zeigt rechts die Kräftebeziehung bei Stationarität. Gleichung 12 wird in diesem Fall zu:

$$(20) \quad F_M + F_{p1} - F_{p2} + F_{I1} - F_{I2} = 0.$$

Die beiden Strömungskräfte enthalten den Massenstrom. Bezogen auf den Querschnitt 2 läßt er sich für ein inkompressibles Fluid als  $\dot{m} = \rho \dot{V} = \rho A_2 c_2$  aufschreiben. Es gilt dann für die Differenz der Strömungskräfte:

$$(21) \quad F_{I1} - F_{I2} = \dot{m} (c_1 - c_2) = \rho A_2 c_2 (c_1 - c_2).$$

Die Druckkräfte an den Querschnitten 1 und 2 bestimmen sich sehr einfach als  $F_{p1} = p_1 A_1$  und  $F_{p2} = p_2 A_2$ . Am Querschnitt M herrscht noch  $p_1$  (Bild 5 Mitte). Das ist eine Folge der radialen Druckgleichung und der Bernoulligleichung. Aus der radialen Druckgleichung geht hervor, daß der Druck über den Querschnitt des Freistrahls hinweg konstant ist. Das hängt damit zusammen, daß die Stromlinien am Eintritt des Freistrahls vollkommen gerade verlaufen. Und aus der Bernoulligleichung folgt, daß dieser Druck  $p_1$ . Neben dem Freistrahls befindet sich ein Totwassergebiet, in dem sich der Druck radial nicht mehr ändert.

Es gilt am Querschnitt M also:

$$(22) \quad F_M = p_1 (A_2 - A_1).$$

Damit wird aus Gleichung 20 mit ausmultiplizierten Druckkräften:

$$(23) \quad R_M = -p_1 A_2 + p_1 A_1 = p_1 A_1 - p_2 A_2 + \rho A_2 c_2 (c_1 - c_2) \Leftrightarrow p_2 - p_1 = \rho c_2 (c_1 - c_2).$$

Weil  $c_1$  größer als  $c_2$  ist, ist  $\rho c_2 (c_1 - c_2)$  positiv. Somit ist es auch  $p_2 - p_1$ .  $p_2$  ist also größer als  $p_1$ . Durch den Stoß von schnellen Teilchen auf langsamere entsteht ein Druckanstieg. Das ist jedoch kein Druckanstieg, der sich als Förderdruck nutzen ließe, im Gegenteil:

Entlang der Mittellinie zieht sich auch bei plötzlicher Querschnittserweiterung eine Stromlinie zwischen den Querschnitten 1 und 2 (Bild 7 Mitte). Das rechtfertigt die Anwendung der Bernoulligleichung. Die Bernoulligleichung liefert für den Druckverlust zwischen den Querschnitten 1 und 2 den Ausdruck

$$(24) \quad \Delta p_V = \rho c_2 (c_2 - c_1) + \frac{\rho}{2} (c_1^2 - c_2^2) = \frac{\rho}{2} (2 c_2^2 - 2 c_1 c_2 + c_1^2 - c_2^2) = \frac{\rho}{2} (c_1^2 - 2 c_1 c_2 + c_2^2).$$

Mithilfe der Kontinuitätsgleichung  $c_1 A_1 = c_2 A_2$  läßt sich das umformen in

$$(25) \quad \Delta p_V = \frac{\rho}{2} \left[ \left( \frac{A_2}{A_1} \right)^2 c_2^2 - 2 \frac{A_1}{A_2} c_2^2 + c_2^2 \right] = \frac{\rho}{2} \left[ \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 2 \frac{A_2}{A_1} + 1 \right] c_2^2 = \left( \frac{A_1}{A_2} - 1 \right)^2 \frac{\rho}{2} c_2^2.$$

Dieser Ausdruck ist positiv. Der Borda-Carnotsche Stoßverlust ist also tatsächlich ein Druckverlust. Gleichung 25 genügt der Gleichung für Druckverluste aus Einzelwiderständen

$$(26) \quad \Delta p_{VZ} = \zeta \frac{\rho}{2} c_2^2 \text{ mit } \zeta = \left( \frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2.$$

Der Borda-Carnotsche Stoßverlast bildet also den seltenen Fall, daß sich der Einzelwiderstandsbeiwert  $\zeta$  aus Gleichungen herleiten läßt.