Integration von Ortsgrößen zu Bereichsgrößen

Strömungen sind Bewegungen von Teilchen innerhalb von Stoffen. Ihre wesentlichen Gesetzmäßigkeiten gehen aus Zusammenhängen zwischen Ortsgrößen hervor. Zu den Ortsgrößen gehören die beiden Kraftdichten Schubspannung und Druck, die Massendichte und die Geschwindigkeit.

Von technischem Interesse sind neben den Ortsgrößen auch ihre Mittelwerte und die zugehörigen Bereichsgrößen. Schubspannungen und Drücke werden über Flächenbereiche integriert, um Reibungs- und Druckkräfte zu erhalten. Aus der Integration der Dichte über einen räumlichen Bereich geht die Masse hervor. Und die Integration der Geschwindigkeit über eine Durchtrittsfläche liefert einen Volumenstrom.

Mittelwerte von Ortsgrößen erhält man in vielen Fällen einfach schon, indem man die zugehörige Bereichsgröße durch den Bereichsinhalt teilt. In einem räumlichen Bereich ergibt sich die mittlere Dichte aus Division der Masse des Bereichs durch das Volumen des Bereichs. In einem Rohr ergibt sich die mittlere Geschwindigkeit aus Division des Volumenstroms durch den Querschnitt des Rohres.

Volumenstrom und mittlere Geschwindigkeit der laminaren Rohrströmung

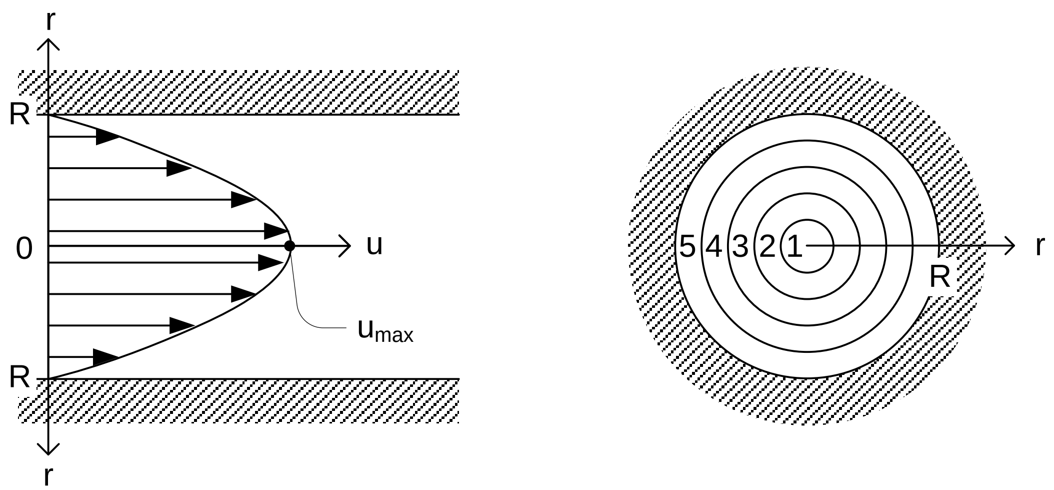

Bild 1: laminare Rohrströmung, links: Geschwindigkeitsprofil, rechts: Seitenansicht

Das Geschwindigkeitsprofil einer laminaren Rohrströmung ist gegeben durch:

$$(1) \qquad u(r) = \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] u_{max}$$

Darin sind R und u_{max} der Rohrradius und die Geschwindigkeit in der Rohrmitte. Aus dem Geschwindigkeitsprofil (intensive Größe bzw. Ortsgröße) soll der Volumenstrom (extensive Größe bzw. Bereichsgröße) bestimmt werden. Der Bereich ist die Querschnittsfläche $A = R^2\,\pi$.

Rechts in Bild 1 ist die Querschnittsfläche A in 5 Kreisringflächen ΔA_j mit j = 1 bis 5 aufgeteilt. Sie werden durch Linien gleicher Geschwindigkeit (Isotachen von griechisch tachys: die Geschwindigkeit) begrenzt. Bild 2 zeigt die Teilflächen einzeln. Die Teilfläche 1 kann formal als eine Kreisringfläche mit Innenradius 0 aufgefaßt werden.

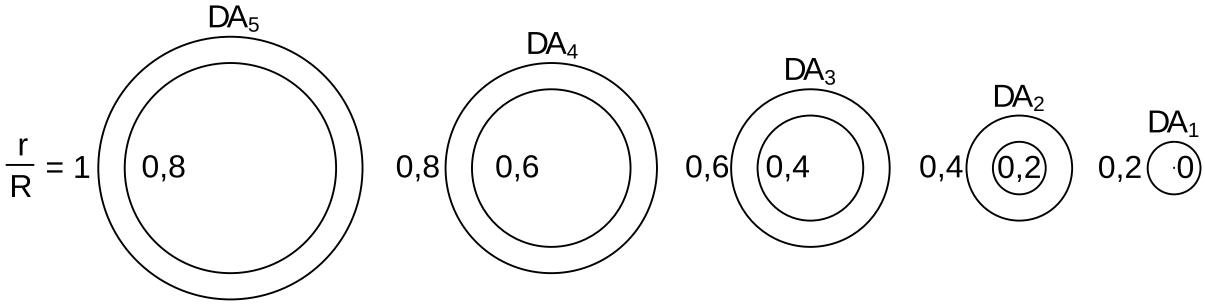

Bild 2: Teilflächen

Der Flächeninhalt ΔA_j der Teilflächen ist

(2) $\Delta A_j = \left(R_{a,j}^2 - R_{i,j}^2\right)\pi.$

Darin sind $R_{a,j}$ und $R_{i,j}$der Außen- und der Innenradius der j-ten Teilfläche. Ihr Volumenstrom $\Delta\dot{V}_j$ ergibt sich aus dem Produkt

(3) $\Delta\dot{V}_j = u_{m,j} * \Delta A_j = u(R_{m,j}) * \Delta A_j.$

Darin ist $u_{m,j}$ die mittlere Geschwindigkeit der j-ten Teilfläche. Sie ergibt sich aus Gleichung 1, wenn man dort für r den mittleren Radius $R_{m,j}$ der Teilfläche einsetzt. Für die Teilfläche 1, z.B., ist der mittlere Durchmesser 0,1 R. Ihre Fläche ist $(0{,}2^2 - 0{,}0^2)\ R^2\pi = 0{,}04\ R^2\pi$. Die mittlere Geschwindigkeit beträgt in dieser Teilfläche $\left[1 - \left(\frac{0{,}1*R}{R}\right)^2\right] * u_{max} = 0{,}99 * u_{max}$.

Das ergibt auf zwei Stellen gerundet einen Teilvolumenstrom von $0{,}04 * u_{max} * R^2\pi$ für die Teilfläche 1. Berechnet man alle Teilvolumenströme in dieser Weise und addiert sie, ergibt sich folgende Tabelle:

Teilfläche	R_i	R_m	R_a	u_m	$\Delta\dot{V}$
1	0 R	0,1 R	0,2 R	0,99 u_{max}	0,04*R^2 π u_{max}
2	0,2 R	0,3 R	0,4 R	0,91 u_{max}	0,11*R^2 π u_{max}
3	0,4 R	0,5 R	0,6 R	0,75 u_{max}	0,15*R^2 π u_{max}
4	0,6 R	0,7 R	0,8 R	0,51 u_{max}	0,14*R^2 π u_{max}
5	0,8 R	0,9 R	1 R	0,19 u_{max}	0,07*R^2 π u_{max}
Gesamt					0,51*R^2 π u_{max}

Tabelle 1: Summation der Teilvolumenströme

Eine bessere Art der Darstellung ist diese:

Teilfläche	R_i/R	R_m/R	R_a/R	u_m/u_{max}	$\Delta\dot{V}/(R^2\pi\ u_{max})$
1	0	0,1	0,2	0,99	0,04
2	0,2	0,3	0,4	0,91	0,11
3	0,4	0,5	0,6	0,75	0,15
4	0,6	0,7	0,8	0,51	0,14
5	0,8	0,9	1	0,19	0,07
Gesamt					0,51

Tabelle 2: Summation der Teilvolumenströme in normierter Weise

Die Summe aller Teilvolumenströme ist der Gesamtvolumenstrom. Er beträgt $0{,}51\ R^2\pi\ u_{max}$. Teilt man ihn durch die Querschnittsfläche $R^2\pi$, erhält man die mittlere Geschwindigkeit im Rohrquerschnitt. Sie beträgt nach dieser Rechnung $0{,}51\ u_{max}$.

Wegen der Flächenunterteilung ist das eine Näherungslösung. Ihre Genauigkeit wird höher, wenn die Flächen noch feiner unterteilt werden. Allgemein gilt für eine Aufteilung in n Teilflächen:

(4) $\dot{V} = \sum_{j=1}^{n} u(R_{m,j})\ \Delta A_j.$

Darin sind $u(R_{m,j})$ und ΔA_j der mittlere Radius und die Querschnittsfläche der j-ten Teilfläche. Integration bedeutet, daß man n in einem Grenzübergang gegen Unendlich führt. Dadurch werden die Teilflächen zu unendlich kleinen Flächenstückchen dA. Es ergibt sich:

(5) $\dot{V} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} u_{m,j}\ \Delta A_j = \int_{(A)} u\ dA.$

Darin bedeutet (A), daß u über die gesamte Fläche A zu integrieren ist.

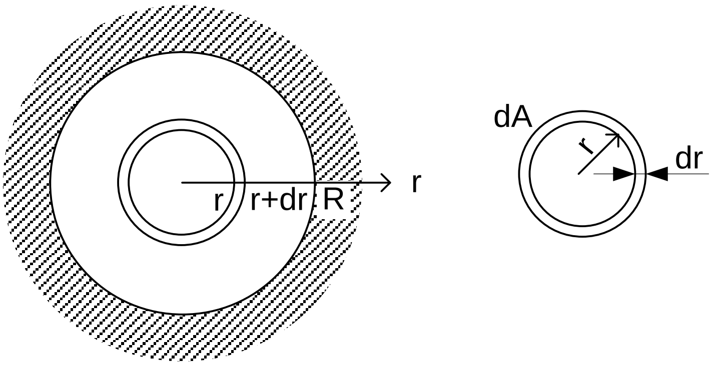

Bild 3: Unendlich kleine Kreisringfläche dA

dA stellt eine unendlich kleine Kreisringfläche im Abstand r vom Mittelpunkt des Kreises dar. Sie hat einen endlichen Umfang $2\ \pi\ r$. Ihre Stärke dr stellt eine unendlich kleine Differenz des Radius dar. Deswegen ist es unerheblich, ob ihr Umfang an der Innenseite des Kreisrings, an der Außenseite oder irgendwo dazwischen gebildet wird. Ihr Flächeninhalt ist:

(6) $dA = 2\ \pi\ r\ dr.$

Anders als A bildet r eine lauffähige Variable entlang einer Koordinatenachse, r läuft von 0 bis R. Gleichung 6 wird nun in Gleichung 5 eingesetzt. Es ergibt sich:

(7) $\dot{V} = \int_0^R u(r)\ 2\ \pi\ r\ dr.$

Die Werte 0 und R bilden jetzt die Integrationsgrenzen eines bestimmten Integrals. $u(r)$ geht aus Gleichung 1 hervor. Eingesetzt in Gleichung 7 ergibt sich:

(8) $\dot{V} = \int_0^R \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] u_{max}\ 2\ \pi\ r\ dr.$

Weil $u_{max}\ 2\ \pi$ konstant ist, läßt sich dieser Ausdruck vor das Integral ziehen. Die Umformung ergibt:

(9) $\dot{V} = 2\ \pi\ u_{max} \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr.$

Darin bildet $r - \frac{r^3}{R^2}$ den Integranden. dr zeigt an, daß r die Integrationsvariable ist. Man löst ein Integral, indem man eine Stammfunktion F findet, deren Ableitung nach der Integrationsvariablen der Integrand ist. Es muß also gelten:

$$\text{(10)} \quad \mathrm{F}'(\mathrm{r}) = r - \frac{r^3}{R^2}\,.$$

Eine Funktion, die das leistet, ist

$$\text{(11)} \quad F(r) = \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4\,R^2} + C.$$

Darin ist C eine Integrationskonstante. Ihre Ableitung nach r ist Null. Bei einem bestimmten Integral wird für r zunächst die obere Integrationsgrenze, hier R, in F eingesetzt und davon das Ergebnis für die untere Integrationgrenze, hier 0, abgezogen:

$$\text{(12)} \quad \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr = F(R) - F(0) = \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4\,R^2} + \mathrm{C}\right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^4}{4\,0^2} + \mathrm{C}\right) = \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4\,R^2} = \frac{R^2}{4}.$$

Damit ist das Integral gelöst und kann in Gleichung 9 eingesetzt werden. Für den Volumenstrom ergibt sich:

$$\text{(13)} \quad \dot{V} = 2\,\pi\,u_{max}\,\frac{R^2}{4} = \frac{1}{2}\,u_{max}\,\pi\,R^2.$$

Teilt man jetzt wieder durch die Fläche $\pi\,R^2$, erkennt man, daß die mittlere Geschwindigkeit der laminaren Rohrströmung genau halb so groß ist wie die maximale Geschwindigkeit in Rohrmitte.

Volumenstrom und mittlere Geschwindigkeit der Scherströmung

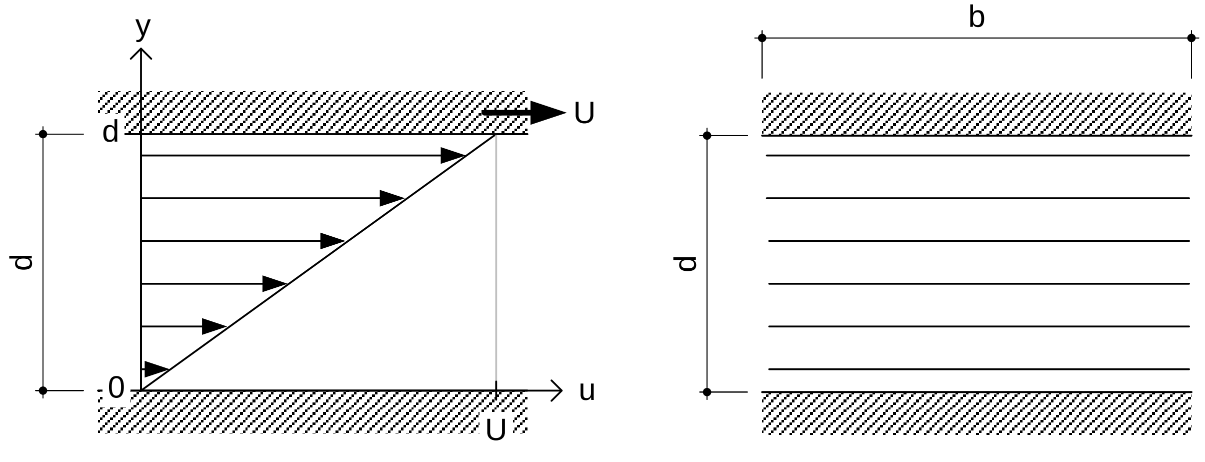

Bild 4: Scherströmung, links: Geschwindigkeitsprofil, rechts: Ansicht von rechts

Die Scherströmung ist hier zwischen zwei planparallelen Platten im Abstand d gezeigt. Die obere Platte wird mit der Geschwindigkeit U gegen die untere verschoben. Technisch relevante Scherströmungen verlaufen zwischen Zylindern, die gegeneinander gedreht werden, oder sich drehenden Kreisscheiben.

Rechts sind wieder Isotachen in der Seitenansicht gezeigt. Gesucht sind der Volumenstrom und die mittlere Geschwindigkeit in der Querschnittsfläche $A = b\ d$. Man liest aus Bild 4 ab, daß sie $\frac{U}{2}$ und $\frac{U}{2} b\ d$ betragen. Zu demselben Ergebnis muß die Integration von $u(y)$ über A führen.

Der Geschwindigkeitsverlauf der Scherströmung ist

(14) $u(y) = \frac{y}{d}\ U.$

Ihr Volumenstrom ergibt sich zunächst ganz allgemein wieder als

(15) $\dot{V} = \int_{(A)} u\ dA.$

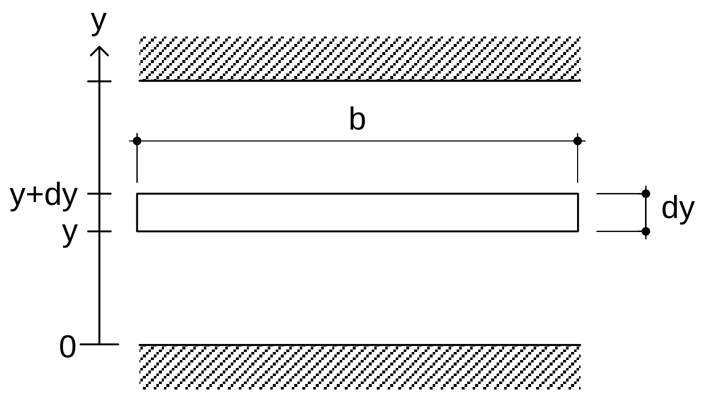

Bild 5: Unendlich kleine Rechteckfläche

Das Flächenstück dA ist wieder so zu legen, daß es von Isotachen begrenzt wird. Aus Bild 5 liest man ab:

(16) $dA = b\ dy.$

Anders als A ist y eine lauffähige Integrationsvariable. Sie läuft von 0 bis d. Gleichung 16 wird nun zusammen mit Gleichung 14 in Gleichung 15 eingesetzt. Daraus entsteht:

(17) $\dot{V} = \int_0^d \frac{y}{d}\ U\ b\ dy = \frac{U\ b}{d} \int_0^d y\ dy.$

Das Integral erscheint nun als bestimmtes Integral mit den Bereichsgrenzen 0 und d. Der Integrand y hat die Stammfunktion $\frac{y^2}{2}$. Damit ergibt sich

(18) $\dot{V} = \frac{U}{2}\ b\ d,$

woraus sich als mittlere Geschwindigkeit wieder das bekannte Ergebnis $\frac{U}{2}$ ergibt.

Übungsaufgabe

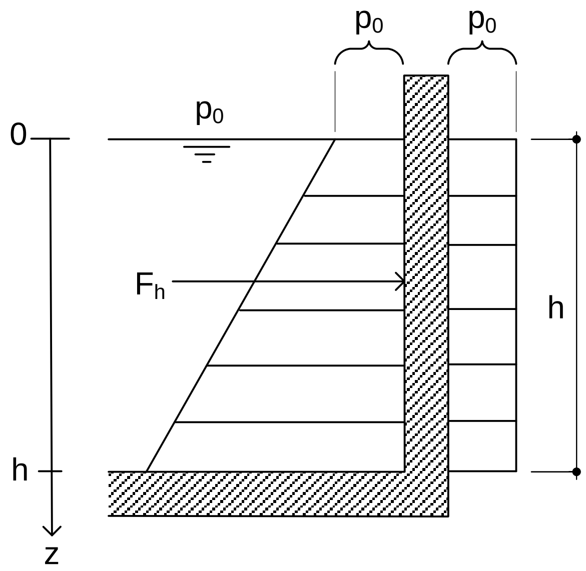

Bild 6: Horizontalkraft auf eine Behälterwand

Ein zylinderförmiger Behälter ist flüssigkeitsgefüllt. Sein Durchmesser ist d. Der Füllstand ist h. An der Oberfläche der Flüssigkeit und außerhalb des Behälters herrscht der Umgebungsdruck p_0. Die beiden Profile zeigen Druckverteilungen. An der Außenseite besteht das Profil aus dem konstanten Umgebungsdruck p_0. Im Behälter ist die Druckverteilung gegeben durch

$$p(z) = p_0 + \rho\, g\, z. \tag{19}$$

Darin ist z nach unten gerichtet. Gesucht ist die resultierende Horizontalkraft auf die Behälterwand. Sie soll durch Integration des Überdrucks über die Behälterwand ermittelt werden.

Lösung: $F_h = \frac{d\, h^2}{2}\, \pi\, \rho\, g.$