Kontinuitätsgleichung

Bilanzierungen

Kontinuitätsgleichungen stellen Massenbilanzen dar. Man spricht von „der" Kontinuitätsgleichung und stellt sie je nach Art der Massenbilanz unterschiedlich dar. Bilanzierungen sind ein bewährtes Prinzip, Berechnungsgleichungen zu erhalten.

Schon ein Bankkonto bildet ein einfaches Anwendungsbeispiel für eine Bilanzierung. Die Bilanzgröße ist der Kontostand. Anders als das Bargeld in einem Tresor ist ein Kontostand nicht zählbar. Er ergibt sich allein aus den Ein- und Auszahlungen und den Überweisungen. Jede Geldbewegung ist mit einer Differenz verbunden, um die der Kontostand steigt oder sinkt. Die Bilanzgröße wird als Menge bilanziert.

Ein technisch relevantes Anwendungsbeispiel für eine Bilanzierung ist der in Bild 1 links gezeigte Pufferspeicher. Die Bilanzgröße ist die innere Energie des Wassers im Speicher. Nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik kann sie sich durch Arbeit und Wärme ändern. Beim Pufferspeicher kommt nur Wärme in Betracht. Es gilt daher einschränkend:

$$(1) \quad \frac{dU}{d\tau} = \dot{Q}_1 - \dot{Q}_2.$$

Darin sind U die innere Energie des Wassers im Pufferspeicher, $\dot{Q}_1$ der eingespeiste Wärmestrom, $\dot{Q}_2$ der abgenommene Wärmestrom und τ die Zeit.

Gleichung 1 ist ein typisches Beispiel für eine Bilanzgleichung in technischen Anwendungen. Auf der linken Seite erscheint nicht eine Mengendifferenz, wie zuvor noch beim Kontostand, sondern die zeitliche Änderung der Bilanzgröße. Entsprechend erscheinen auf der rechten Seite keine Wärmemengen, sondern Wärmeströme. Anders als Mengenbeziehungen gelten Beziehungen zwischen zeitlichen Änderungen und Strömen für den Augenblick.

Der Speicher bildet ein Beispiel für ein Bilanzgebiet. Ebenso wie die Zeit in Bilanzgleichungen auf den Augenblick reduziert werden kann, können auch Bilanzgebiete als unendlich klein aufgefaßt werden. Weiter unten in diesem Arbeitsblatt wird das noch anhand der örtlichen Massenbilanz gezeigt.

Ströme, die die Grenze des Bilanzgebiets überschreiten, wie im Beispiel des Speichers die Wärmeströme $\dot{Q}_1$ und $\dot{Q}_2$ werden als Transportströme bezeichnet. Die Alternative sind Wandlungsströme. Sie verändern die Bilanzgröße aus dem Inneren des Bilanzgebiets heraus. Wenn die Bilanzgröße eine Energie ist, sind Wandlungsströme mit einer Energieumwandlung verbunden. Beim Speicher wäre z.B. eine elektrische Heizpatrone eine Einrichtung, die einen Wandlungsstrom erzeugt.

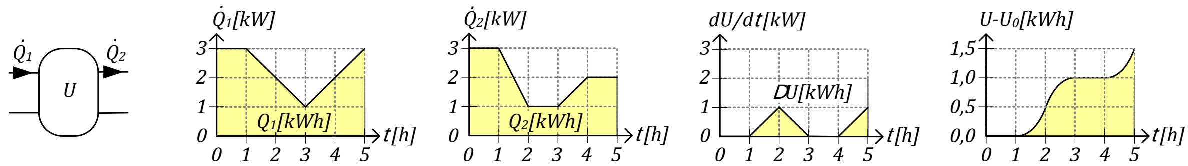

Bild 1: Abgenommene Heizleistung an einem Pufferspeicher

In Bild 1 ist ein Beispiel für zeitliche Verläufe von $\dot{Q}_1$ und $\dot{Q}_2$ in kW gezeigt. Rechts davon ist der resultierende Verlauf von $dU/d\tau$ dargestellt. Die Flächenintegrale der Verläufe bilden die zugehörigen Energiemengen Q_1 und Q_2 in kWh. Ihre Differenz ΔU bildet die Menge, um die sich die innere Energie im Speicher, ausgehend von einem Anfangszustand U_0, vermehrt.

Zwischen den Energiemengen besteht die Beziehung

$$(2) \qquad \Delta U = U - U_0 = \int_{\tau_0}^{\tau} \left(\dot{Q}_1 - \dot{Q}_2\right) d\tau = Q_1 - Q_2.$$

Rechts in Bild 1 ist noch der der zeitliche Verlauf der inneren Energie als Differenz zu ihrem Anfangswert U_0 gezeigt. Nach 5 Stunden ist sie um 1,5 kWh vermehrt worden. Das entspricht der Fläche unter dem Verlauf von $dU/d\tau$ im zweiten Diagramm von rechts.

Massenbilanz

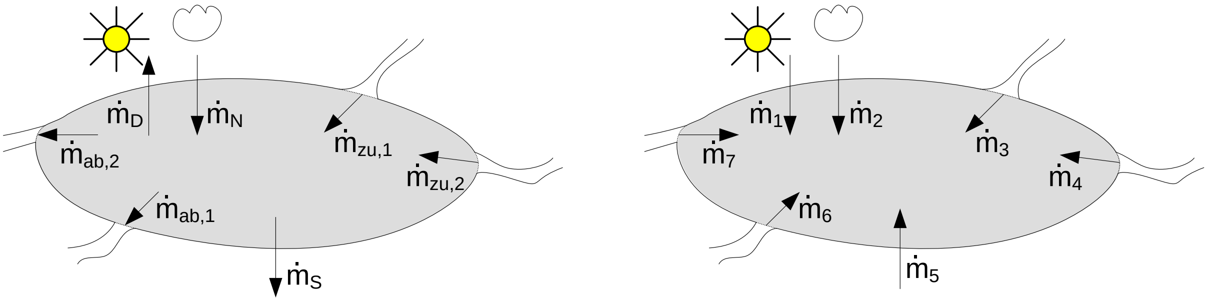

Bild 1: Massenbilanz in einem See

Als mögliches Gebiet für eine Massenbilanz wird zunächst ein See betrachtet (Bild 1). Das Bilanzgebiet ist grau hervorgehoben. Die Masse des Wassers im See m erfährt durch Massenströme eine zeitliche Änderung $m'(\tau)$, z.B. in kg/s. Darin ist τ die Zeit.

Im Beispiel gibt es neben einem Niederschlagsmassenstrom $\dot{m}_N$ zwei Zuflüsse $\dot{m}_{zu}$, die der Masse im See zugute kommen, und neben einem Verdunstungsmassenstrom $\dot{m}_D$ und einem Versickerungsmassenstrom $\dot{m}_S$ zwei Abflüsse $\dot{m}_{ab}$, die die Masse des Sees mindern. Sind alle Zuflüsse zusammen größer als die Abflüsse, nimmt die Masse im See zu. Das bedeutet: $m'(\tau)$ ist positiv. Umgekehrt nimmt die Masse im See ab, $m'(\tau)$ ist negativ. Daneben gibt es noch die Möglichkeit, daß sich Zuflüsse und Abflüsse genau ausgleichen. In diesem Fall bleibt die Masse im See gleich, $m'(\tau)$ ist Null.

Eine allgemeingültige Art, die Massenänderung zu bestimmen, zeigt Bild 1 rechts. Die Massenströme werden durchnumeriert und durchgehend als Massenströme aufgefaßt, die in das Bilanzgebiet hinein gerichtet sind. Das hat zur Folge, daß Massenströme, die die Bilanzgröße erhöhen, hier $\dot{m}_2$, $\dot{m}_3$ und $\dot{m}_4$, ein positives Vorzeichen und Massenströme, die die Bilanzgröße vermindern, hier $\dot{m}_1$, $\dot{m}_5$, $\dot{m}_6$ und $\dot{m}_7$, ein negatives Vorzeichen erhalten. Für n Massenströme wird die Massenbilanz zu

$$(3) \qquad m'(\tau) = \sum_{j=1}^{n} \dot{m}_j$$

oder, wenn man noch die Dichte ρ, das Volumen V und den Volumenstrom $\dot{V}$ herausführt, zu

$$(4) \qquad \rho\, V'(\tau) = \sum_{j=1}^{n} \rho\, \dot{V}_j.$$

Mit der Änderung der Masse des Wassers im See, sind Höhenstandsänderungen verbunden. Man kann die Massenbilanz nutzen, um z.B. zu prognostizieren mit welchen Höhenstandsänderungen Schneeschmelzen im Quellgebiet der Zuflüsse verbunden sein könnten. Ferner sind aus der Höhenstandsänderung und der Bilanzierung aller anderen Zu- und Abflüsse, Rückschlüsse auf den am schwierigsten zu erfassenden Massenstrom, den Versickerungsmassenstrom, möglich.

Für Füllstandsberechnungen muß das Fassungsvolumen des Sees von seinem Füllvolumen unterschieden werden. Das Füllvolumen ist das Volumen des Wassers im See. Sein Maximum ist das Fassungsvolumen des Sees. Es ist durch die Ufer des Sees begrenzt. Das Fassungsvolumen bildet das Bilanzgebiet.

Massenbilanz in Stromröhren

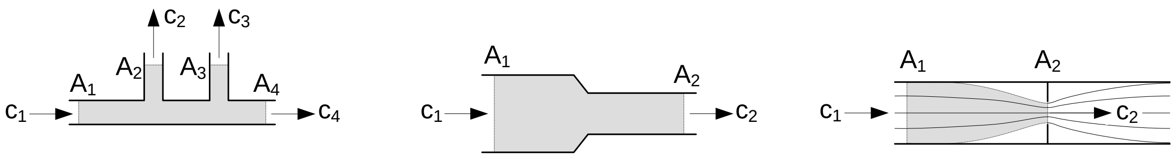

Bild 2: Stromröhrenabschnitte mit richtungsstationärer Strömung eines inkompressiblen Fluids

Bild 2 zeigt grau unterlegt einige typische Beispiele für Bilanzgebiete in Rohrleitungsinstallationen. Im Unterschied zum See sind sie immer vollgefüllt, Fassungs- und Füllvolumen müssen nicht unterschieden werden.

Rechts in Bild 3 sind Stromlinien eingezeichnet. Man erkennt, daß die Mantelfläche des Bilanzgebiets aus Stromlinien besteht. Das ist auch in den anderen beiden Beispielen so. Der Stromlinienmantel bildet eine Fläche, durch die keine Massenströme hindurchtreten können. Anderenfalls würden die Stromlinien anders verlaufen. Man nennt solche Bilanzgebiete Stromröhren.

Rechts und in der Mitte von Bild 2 sind einfache Stromröhren mit einer Eintrittsfläche (A_1) und einer Austrittsfläche (A_2) gezeigt. Links zeigt Bild 3 ein Beispiel für eine verzweigte Stromröhre. In diesem Fall hat sie mehrere Austrittsflächen. Ebensogut könnte sie auch mehrere Eintrittsflächen haben.

Für die Volumenströme durch die Eintritts- und Austrittsflächen gilt:

$$(5) \qquad \dot{V} = A\,c.$$

Darin sind c die mittlere Fließgeschwindigkeit in Strömungsrichtung und A der Querschnitt, verstanden als Fläche quer zur Strömungsrichtung. Eine besondere Form von Stromröhren sind Stromfäden. Sie sind als Stromröhren definiert, in denen die Fließgeschwindigkeit und alle anderen interessierenden Größen über den Querschnitt hinweg konstant sind. Das ist z.B. bei unendlich dünnen Stromröhren der Fall.

Ein Sonderfall von Gleichung 4 tritt auf, wenn das Fluid als inkompressibel angenommen wird, also die Dichte ρ konstant ist. Weil die Stromröhren stets vollgefüllt sind, kann sich ohne Dichteänderung auch die Masse des enthaltenen Fluids nicht ändern. Wenn sie z.B. 1 kg beträgt, dann bleibt sie 1 kg, unabhängig davon, ob das Fluid in Ruhe ist oder sich bewegt, und auch unabhängig davon, wie schnell es sich durch die Stromröhre bewegt.

Formal betrachtet, wird aus Gleichung 4 bei konstanter Dichte zunächst

$$(6) \qquad V'(\tau) = \sum_{j=1}^{n} \dot{V}_j.$$

Darin ist V voraussetzungsgemäß nicht nur das Füllvolumen, sondern auch das Fassungsvolumen, also das zeitlich unveränderliche Volumen der Stromröhre selbst. Deswegen ist die linke Seite Null und es entsteht:

$$(7) \quad \sum_{j=1}^{n} \dot{V}_j = 0.$$

Nach Einführung von Gleichung 5 wird daraus:

$$(8) \quad \sum_{j=1}^{n} A_j\, c_j = 0.$$

Dabei muß man weiter beachten, daß alle Massenströme und entsprechend auch alle Fließgeschwindigkeiten als in das Bilanzgebiet hinein gerichtet aufgefaßt werden. Für den einfachen Rohrabschnitt in Bild 2 Mitte führt Gleichung 8 mit Beachtung der Vorzeichen auf den einfachen Zusammenhang

$$(9) \quad A_1\, c_1 = A_2\, c_2.$$

Mit der Querschnittsverengung erhöht sich die Geschwindigkeit. Kann solch eine Strömung stationär sein? Ja, denn mit instationär ist nur bezeichnet, daß die Geschwindigkeit sich zeitlich nicht ändert. Örtlich kann sie sich sehr wohl ändern. Unabhängig davon gelten diese Gleichungen nicht nur für stationäre, sondern auch für instationäre Strömungen.

Grundsätzlich ist es möglich, auch Strömungen von Gasen nach der Kontinuitätsgleichung für das inkompressible Fluid zu rechnen. Man muß sich jedoch dafür hüten, sie auf Bilanzgebiete anzuwenden, in denen das Gas in relevanten Größenordnungen komprimiert oder entspannt werden. Völlig verfehlt wäre die Anwendung der Kontinuitätsgleichung für das inkompressible Fluid beidseits einer Drossel.

Umgekehrt ist man auch bei Flüssigkeiten nicht vor unzulässigen Anwendungen der Kontinuitätsgleichung für das inkompressible Fluid gefeit. Wenn in einem Bilanzgebiet hohe Spreizungen auftreten, sind mit ihnen, auch bei Wasser, merkliche Dichteunterschiede verbunden. Für eine einfache Stromröhre rechnet man statt mit Gleichung 9 in solchen Fällen genauer mit der Gleichung

$$(10) \quad \rho_1 A_1\, c_1 = \rho_2 A_2\, c_2,$$

die die Dichte berücksichtigt.

Als Beispiel für die Auswirkung des Temperatureinflusses wird ein Rohr mit gleichbleibendem Querschnitt betrachtet, in das Wasser mit 20°C eintritt und mit 80°C austritt. Das Wasser hat bei 20°C eine Dichte von 998,23 kg/m³ und bei 80°C eine Dichte von 971,83 kg/m³. Im Fall einer Eintrittsgeschwindigkeit von 1 m/s tritt es mit 998,23/971,83 m/s = 1,03 m/s aus. Wenn man die Dichteunterschiede außer Acht ließe, würde man sich in diesem Fall also einen unnötigen Fehler von 3% einhandeln.

Örtliche Kontinuitätsgleichung eines inkompressiblen Fluids

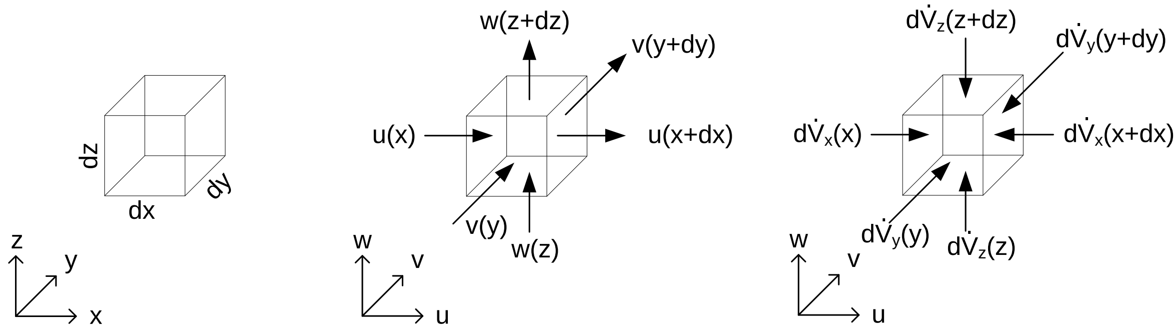

Bild 3: Massenbilanz in einem unendlich kleinen Quader

Wenn das Fluid inkompressibel ist, bekommt auch die örtlich Massenbilanz eine einfache Gestalt. Sie läßt sich für einen unendlich kleinen Quader herleiten. Bild 3 rechts zeigt unendlich kleine Volumenströme $d\dot{V}$, die alle in den Quader hinein gerichtet sind. Sie lassen sich wieder nach Art von Gleichung 5 aus Geschwindigkeiten und Durchtrittsflächen bestimmen. Z.B. gilt für den Volumenströme $d\dot{V}(x)$:

$$(11) \quad d\dot{V}(x) = u(x)dy\,dz.$$

Gemäß Gleichung 8 gilt für alle Volumenströme unter Beachtung ihrer Vorzeichen:

$$(12) \quad [u(x) - u(x+dx)]dy\,dz + [v(y) - v(y+dy)]dx\,dz + [w(z) - w(z+dz)]dx\,dy = 0.$$

Die Gleichung wird nun durch das Produkt $(-dx\,dy\,dz)$ geteilt. Danach entsteht:

$$(13) \quad \frac{u(x+dx)-u(x)}{dx} + \frac{v(y+dy)-v(y)}{dy} + \frac{w(z+dz)-w(z)}{dz} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Die drei Summanden der linken Seite stellen Differentialquotienten, also Ableitungen dar. Ihre Summe wird als Divergenz des Geschwindkeitsvektors $div\,\underline{c}$ bezeichnet. Gleichung 13 bekommt mit Verwendung des Operators div die kompakte Form

$$(14) \quad div\,\underline{c} = 0.$$

Für ein inkompressibles Fluid besagt die Kontinuitätsgleichung also, daß die Divergenz der Geschwindigkeit Null ist. In numerischen Simulationen von Strömungen kann dieser Zusammenhang in der Form

$$(15) \quad \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} + \frac{v(y+\Delta y)-v(y)}{\Delta y} + \frac{w(z+\Delta z)-w(z)}{\Delta z} = 0$$

genutzt werden. Darin sind Δx, Δy und Δz die Maschenweiten eines räumlichen Gitternetzes.