Transporttheorem

Arten der Beschleunigung

Beschleunigungen sind zeitliche Geschwindigkeitsänderungen. Sie können positiv oder negativ sein. Daß es zwei grundsätzlich verschiedene Arten der Beschleunigung gibt, kann man schon im Straßenverkehr feststellen:

Die eine beobachtet man in Kurven. Vor der Kurve wird das Fahrzeug gebremst (negative Beschleunigung). Aus der Kurve heraus wird es beschleunigt (positive Beschleunigung). Beides ist eine Beschleunigung von Ort zu Ort. In der Physik nennt man das konvektive Beschleunigung.

Die andere Art der Geschwindigkeitsänderungen beobachtet man bei Wetterwechseln. Wenn Regen einsetzt, wird die Geschwindigkeit tunlichst herabgesetzt. Wenn die Straße wieder abtrocknet, wird die Geschwindigkeit allmählich wieder heraufgesetzt. Auch das ist eine Beschleunigung. In einer Kurve geschieht sie nicht von Kurveneingang zu Kurvenausgang, sondern sie ist an jedem Ort der Kurve zu beobachten. In der Physik nennt man das örtliche bzw. lokale Beschleunigung.

Ein Beobachter, der am Straßenrand steht und nichts weiter sieht als einen bestimmten Ort, durch den sich aufeinanderfolgende Fahrzeuge bewegen, kann nur sehen, wie sich die Geschwindigkeit am Ort ändert. Andere Orte sieht er nicht. Er kann also lediglich die lokale, nicht aber die konvektive Beschleunigung feststellen.

Ein Beobachter in einem Fahrzeug kann hingegen beide Beschleunigungsarten feststellen. Wenn sie zugleich auftreten, addieren sie sich aus seiner Sicht zu einer Gesamtbeschleunigung. Das ist z.B. der Fall, wenn gleichzeitig Regen einsetzt und das Fahrzeug auf eine Kurve zufährt. Die Gesamtbeschleunigung wird auch substantielle Beschleunigung genannt. Darin kommt zum Ausdruck, daß es sich um eine Beschleunigung handelt, die eine bewegte Substanz, hier: das Fahrzeug, erfährt.

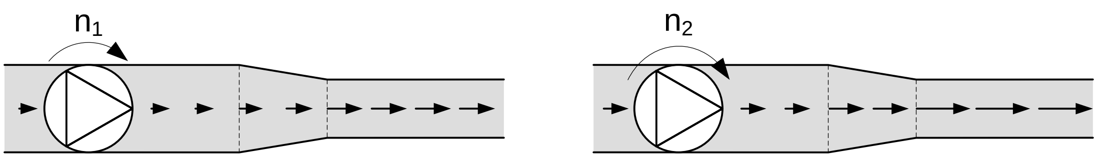

Bild 1: Beschleunigungsraten in einer Rohrströmung

In Rohrströmungen können lokale Beschleunigungen z.B. durch zeitliche Veränderungen der Pumpendrehzahl und konvektive Beschleunigungen durch Querschnittsänderungen entstehen. Bewegte Teilchen erleben beides als substantielle Beschleunigung

Ob man Strömungen aus der Sicht der bewegten Teilchen oder ortsbezogen betrachtet, ist eine grundsätzliche Frage. Wir Menschen sind es gewohnt, uns durch den Raum zu bewegen. Die natürlichere Sichtweise wäre demnach die teilchenbezogene.

Hingegen sind Systeme, in denen technische Strömungen betrieben werden, Rohrleitungen, Lüftungskanäle usw., sowie die zugehörigen Aggregate, Pumpen, Lüfter usw., in der Regel ortsfest. Selbst bewegte Systeme wie z.B. Flugzeuge lassen sich ebenfalls als ortsfest auffassen. In Windkanälen sind sie das auch tatsächlich.

Auch der Begriff der stationären Strömung beruht auf der ortsbezogenen Sichtweise. Stationär meint nur, daß sich die Geschwindigkeit am Ort nicht verändert. Von Ort zu Ort kann sie sich auch bei stationärer Strömung sehr wohl verändern. Mit den neuen Begriffen heißt das: Stationäre Strömungen haben keine lokale Beschleunigung, wohl aber können konvektive Beschleunigungen auftreten.

Weil substantielle Beschleunigung und lokale Beschleunigung nicht das gleiche sind, verlangen sie auch unterschiedliche Schreibweisen. Im folgenden wird immer nur die tangentiale Komponente der Geschwindigkeit, c_T oder kürzer: c, betrachtet. Als Schreibweise für die substantielle Beschleunigung ist $Dc/D\tau$ eingeführt worden, während $dc/d\tau$ die lokale Beschleunigung bezeichnet. Darin ist τ die Zeit.

Mit diesen Zeichen gilt für die substantielle Beschleunigung:

$$(1) \quad \frac{Dc}{D\tau} = \frac{dc}{d\tau} + a_c \, .$$

Darin steht a_c für die konvektive Beschleunigung. Im folgenden wird gezeigt, wie sie sich berechnet. Dazu wird die stationäre Strömung in einer Verjüngung betrachtet (Bild 2). Stationär bedeutet nach Gleichung 1, daß die konvektive Beschleunigung der substantiellen entspricht, denn die lokale Beschleunigung ist stationär ja eben Null.

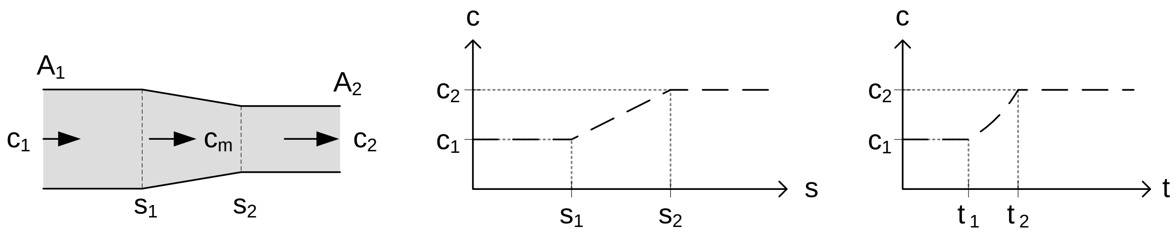

Bild 2: Verlauf der tangentialen Geschwindigkeit in einer Verjüngung

Die Teilchen des Fluids treten mit der Geschwindigkeit c_1 in die Verjüngung ein und erfahren dort einen Geschwindigkeitsanstieg $\Delta c = c_2 - c_1$. Um die durchschnittliche Beschleunigung der Teilchen zu erhalten, muß Δc noch durch die Zeitdauer $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$ geteilt werden, in der sie die Verjüngung durchlaufen. Wenn die Länge $\Delta s = s_2 - s_1$ und die mittlere Geschwindigkeit c_m in der Verjüngung bekannt sind, gilt für die Zeitdauer $\Delta\tau$:

$$(2) \quad c_m = \frac{\Delta s}{\Delta\tau} \qquad \Delta\tau = \frac{\Delta s}{c_m} \, .$$

Daraus folgt für die durchschnittliche konvektive Beschleunigung $a_{c,m}$ in der Verjüngung:

$$(3) \quad a_{c,m} = \frac{\Delta c}{\Delta\tau} = c_m \frac{\Delta c}{\Delta s} \, .$$

Bild 3 zeigt Zahlenbeispiele für drei verschiedene Eintrittsgeschwindigkeiten. Das Fluid wird als inkompressibel angenommen, das Flächenverhältnisses A_2/A_1 mit 0,5. Aus der Kontinuitätsgleichung für das inkompressible Fluid, $c_1 A_1 = c_2 A_2$, folgt daraus $c_2 = 2\, c_1$. Vereinfachend wird angenommen, daß die Geschwindigkeit in der Verjüngung linear ansteigt. Die mittlere Geschwindigkeit in der Verjüngung c_m ist in diesem Fall der arithmetische Mittelwert von c_1 und c_2. Bild 3 zeigt $c_m$oben in der Mitte.

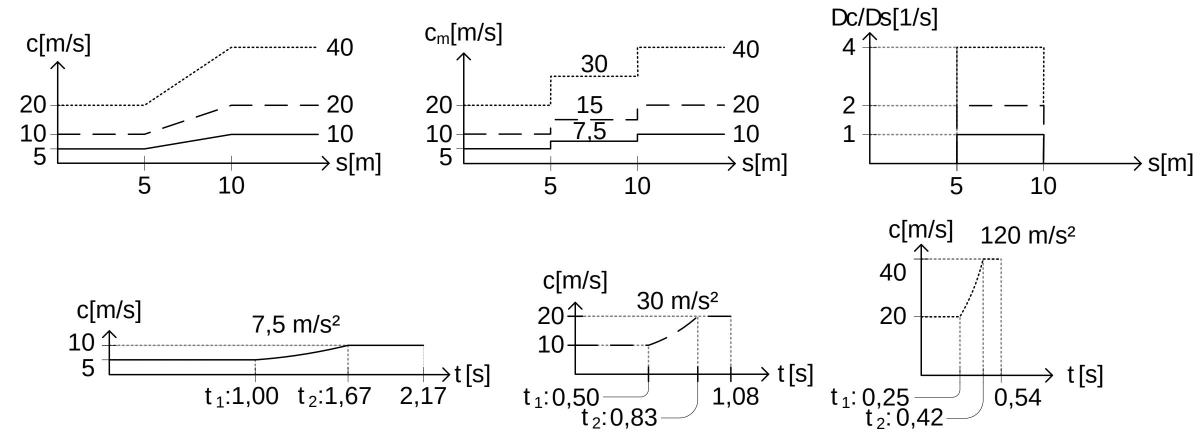

Bild 3: Zahlenbeispiele für die tangentiale konvektive Beschleunigung

Rechts daneben erscheint das Verhältnis $\Delta c/\Delta s$. Bei doppelter Geschwindigkeit verdoppelt es sich, bei halber Geschwindigkeit halbiert es sich. Unten sieht man den zeitlichen Geschwindigkeitsverlauf. Bei halber Geschwindigkeit dauert alles doppelt so lange, bei doppelter Geschwindigkeit halb so lange. Beide Effekte wirken quadratisch zusammen und sorgen dafür, daß sich die konvektive Beschleunigung bei doppelter Geschwindigkeit vervierfacht und bei halber Geschwindigkeit viertelt.

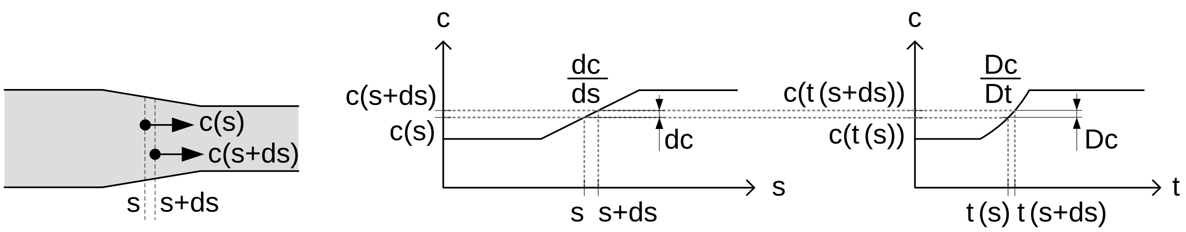

Bild 4: Tangentiale konvektive Beschleunigung in einem unendlich kleinen Stromfadenabschnitt

Es wird nun die örtliche konvektive Beschleunigung untersucht. Dazu wird statt der Verjüngung mit ihrer endlichen Länge Δs ein unendlich kleiner Stromfadenabschnitt mit der Länge ds betrachtet. In Bild 4 liegt er innerhalb der Verjüngung, seine Lage ist aber beliebig.

Es wird nach wie vor Stationarität angenommen. Die konvektive Beschleunigung muß weiter der substantiellen Beschleunigung entsprechen. Es gilt also $a_c = Dc/D\tau$. Darin ist Dc der Geschwindigkeitszuwachs, den ein Teilchen während einer unendlich kleinen Zeitspanne $D\tau$ erfährt. Dabei steht $D\tau$ für beliebige Zeitspannen.

Insbesondere kann $D\tau$ auch so gewählt wird, daß es gleichbedeutend mit der Zeitspanne ist, in der das Teilchen den Stromfadenabschnitt s bis $s + ds$ durchläuft. Der Geschwindigkeitszuwachs Dc, den das Teilchen erfährt, ist dann gleichbedeutend mit dem Geschwindigkeitszuwachs dc, der zwischen den Orten s und $s + ds$ herrscht.

Die Durchlaufzeit $D\tau$ berechnet sich als $D\tau = ds/c$. Für die substantielle Beschleunigung $\frac{Dc}{D\tau}$, die hier ja gleichbedeutend mit der konvektiven Beschleunigung a_c ist, ergibt sich daraus:

$$(4) \qquad a_c = \frac{Dc}{D\tau} = \frac{dc}{D\tau} = \frac{dc}{ds/c} = c\,\frac{dc}{ds}\,.$$

Der Ausdruck $c\ dc/ds$ bleibt auch dann die konvektive Beschleunigung, wenn die Strömung nicht mehr stationär ist und die Teilchen zusätzlich eine lokale Beschleunigung erfahren. Ihre substantielle Beschleunigung ist dann:

$$(5) \quad \frac{Dc}{D\tau} = \frac{dc}{d\tau} + c\frac{dc}{ds}\,.$$

Alle Ausdrücke in Gleichung 4 sind sowohl vom Ort als auch von der Zeit abhängig. Wenn die Strömung nicht mehr stationär ist, wird $c(s)$ zu $c(s,\tau)$. Wenn c sich zeitlich ändert, gilt das auch für dc/ds. Umgekehrt ist selbst die lokale Beschleunigung nicht nur von der Zeit, sondern auch vom Ort abhängig. Im Beispiel ist sie am Austritt der Verjüngung doppelt so hoch wie am Eintritt.

Die konvektive Beschleunigung läßt sich auch noch weiter umformen. In tangentialer Richtung gilt.

$$(6) \quad c\frac{dc}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{c^2}{2}\right),$$

Probe: $\frac{d}{ds}\left(\frac{c^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}c^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(c * c) = \frac{1}{2}\left(c\ \frac{dc}{ds} + \frac{dc}{ds}\ c\right) = \frac{1}{2}\left(\ 2c\ \frac{dc}{ds}\right) = \mathrm{c}\ \frac{dc}{ds}.$

Das entspricht der oben schon gemachten Beobachtung, daß die konvektive Beschleunigung nicht mit der Geschwindigkeit, sondern mit ihrem Quadrat wächst.

Reynoldsches Transporttheorem in eine Richtung

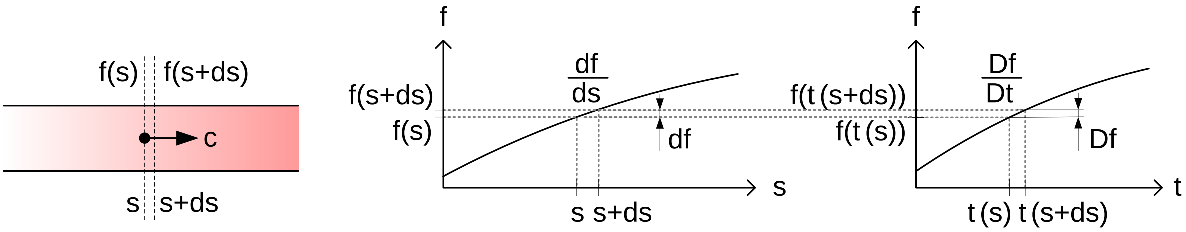

Bild 5: Temperaturerhöhung in einer Rohrströmung

Statt der zeitlichen Änderung der Geschwindigkeit c wird nun die zeitliche Änderung einer beliebigen Ortsgröße f betrachtet. In Bild 5 ist als Beispiel für f die Temperatur in einer Rohrströmung gewählt. Es sich könnte um ein Rohr in einem Wärmeübertrager handeln. Die Zusammenhänge gelten aber allgemein für Ortsgrößen in einer Strömung.

In der Mitte von Bild 5 ist der örtliche Verlauf von f gezeigt. Weil er nicht konstant ist, sagt man: Er hat einen Gradienten. Das ist die Steigung df/ds. Rechts in Bild 5 ist der Verlauf von f gezeigt, den ein Teilchen erfährt, das sich mit einer Geschwindigkeit c durch das Rohr bewegt. Die Steigung dieses Verlaufs ist die substantielle Änderung $Df/D\tau$.

Ebenso wie oben noch bei der substantiellen Änderung der Geschwindigkeit, der substantiellen Beschleunigung $Dc/D\tau$, setzt sich auch die substantielle zeitliche Änderung einer beliebigen Ortsgröße $Df/D\tau$ aus einer lokalen Änderung $df/d\tau$ und einer konvektiven Änderung a_f zusammen. Es gilt:

$$(7) \quad \frac{Df}{D\tau} = \frac{df}{d\tau} + a_f\ .$$

Im Beispiel des Wärmeübertragers kommen lokale Änderungen der Temperatur bei Aufheiz-, oder Abkühlvorgängen zustande. Ähnlich wie in einer Kurve die Geschwindigkeit an jedem Ort reduziert wird, wenn es regnet, vermindert sich auch die Temperatur im gesamten Wärmeübertrager, wenn er auskühlt, weil z.B. ein primärseitiger Kessel gerade ausgeschaltet worden ist.

Konvektive Änderungen, sind durch den Gradienten bedingt. Ähnlich wie die Teilchen in einer Verjüngung in Bereiche mit immer höherer Geschwindigkeit kommen und eine Geschwindigkeitsänderung von Ort zu Ort erfahren, gelangen sie im Rohr des Wärmeübertragers in immer wärmere Bereiche und erfahren eine Temperaturänderung von Ort zu Ort. Für die einzelnen Teilchen ändert sich die Temperatur umso schneller, je höher ihre Geschwindigkeit ist.

Wenn der Wärmeübertrager weder aufgeheizt wird noch auskühlt, ändert sich der Temperaturverlauf nur noch örtlich, aber nicht mehr zeitlich. Er ist stationär. Allgemein ist der Verlauf einer Ortsgröße f stationär, wenn es keine lokale Änderung gibt. Die substantielle Änderung ist dann rein konvektiv. Das wird auch hier wieder genutzt, um die konvektive Änderung zu berechnen:

Die substantielle Änderung $Df/D\tau$ sagt aus, daß die Teilchen in einer Zeit $D\tau$ einen Zuwachs Df erfahren. $D\tau$ wird wieder so gewählt, daß sie der Zeit $d\tau$ entspricht, in der die Teilchen vom Ort s zum Ort $s + ds$ gelangen. Es gilt dann $D\tau = d\tau = ds/c$. Der Zuwachs Df entspricht dann dem örtlichen Zuwachs df zwischen s und $s + ds$.

Daraus ergibt sich die konvektive zeitliche Änderung als

$$(8) \qquad a_f = \frac{Df}{D\tau} = \frac{df}{ds/c} = c\,\frac{df}{ds}\,.$$

Für die substantielle zeitliche Temperaturänderung führt das insgesamt auf

$$(9) \qquad \frac{Df}{D\tau} = \frac{df}{d\tau} + c\,\frac{df}{ds}\,.$$

Diese Gleichung ist eine Form des Reynoldschen Transporttheorems. Es gilt für beliebige Orte s und beliebige Zeitpunkte τ und besagt, daß Teilchen, die zu einem Zeitpunkt τ einen Ort s durchlaufen, einerseits eine zeitliche Änderung von f am Ort s erfahren, die auch an anderen Orten wirkt (lokale Änderung) und andererseits eine Änderung, die aus dem örtlichen Anstieg von f und ihrer eigenen Geschwindigkeit resultiert (konvektive Änderung).

Es wäre müßig, ein Rechenbeispiel für das Transporttheorem anzugeben. Denn es wird nicht genutzt, um konkrete Berechnungen zu führen, sondern als theoretisches Werkzeug. Mithilfe des Transporttheorems lassen sich zeitliche Änderungen beliebiger Ortsgrößen umrechnen. Z.B. wird es im Arbeitsblatt „Bernoulli-Gleichung“ dazu genutzt, die Bernoulli-Gleichung aus einem Kräftegleichgewicht an einem bewegten Flüssigkeitsvolumen herzuleiten.

Gleichung 9 gilt nur für den Fall, daß der Anstieg der Ortsgröße f „längs“ zur Bahn des Teilchens erfolgt. In Bahnlinienkoordinaten bedeutet „längs“: in tangentialer Richtung s. Nur in diesem Fall kann die Ortsänderung mit df/ds notiert werden. Auch c steht ja nicht für eine Geschwindigkeit in eine beliebige Richtung, sondern c ist gleichbedeutend mit der Tangentialgeschwindigkeit c_T. Man sagt für den Fall, daß der Gradient mit df/ds notiert werden kann, auch: Geschwindigkeitsvektor und Gradient haben die gleiche Richtung.

Reynoldsches Transporttheorem in mehrere Richtungen

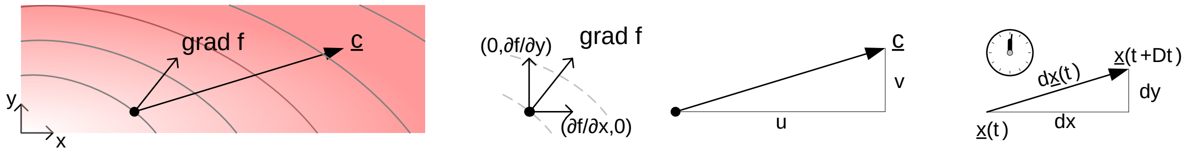

Bild 6: Unterschiedliche Richtungen von Geschwindigkeitsvektor und Gradient

Bild 6 zeigt den Fall, daß Geschwindigkeitsvektor und Gradient unterschiedliche Richtungen haben. Als Beispiel für die Ortsgröße f kann man sich wieder eine Temperatur vorstellen. Allerdings ist f nun nicht mehr von einer Richtung abhängig, wie gerade noch als $f(s)$, sondern von zwei Richtungen, f ist jetzt $f(x,y)$. Die grau ausgezogenen Linien sind Linien, auf denen f überall den gleichen Wert hat. Bei einer Temperatur nennt man sie Isothermen.

Der Gradient erscheint nun als Vektor $grad\ f$. Er enthält die beiden partiellen Ableitungen von f. Es gilt $grad\ f = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y)$. Wie Bild 6 links in der Mitte zeigt, läßt sich der Gradient als Addition der Vektoren $(\partial f/\partial x, 0)$ und $(0, \partial f/\partial y)$ auffassen. Die Länge des Vektors $(\partial f/\partial x, 0)$ ist dabei gleichbedeutend mit dem Anstieg $\partial f/\partial x$, die Länge von $(0, \partial f/\partial y)$ ist $\partial f/\partial y$.

Man erkennt: Steigt f in beide Richtungen gleich stark an, zeigt der Gradient in 45°-Richtung. Ist $\partial f/\partial x$ geringer als $\partial f/\partial y$, ist er flacher, umgekehrt ist er steiler. Im Ergebnis zeigt der Gradient immer in die Richtung des steilsten Anstiegs.

Auch wenn $grad\ f$ nun ein Vektor ist, bleibt f selber hier noch eine ungerichtete Größe, wie es im gewählten Beispiel der Temperatur ja auch der Fall ist. Weil der Gradient und der Geschwindigkeitsvektor $\underline{c}$ nicht mehr gleichgerichtet sind, muß auch $\underline{c}$ jetzt in seine beiden Komponenten u und v aufgeteilt werden, wie es Bild 6 rechts in der Mitte zeigt. Auch die Orte sind jetzt Ortsvektoren (Bild 6 rechts). Zum Zeitpunkt τ befindet sich ein Teilchen am Ort $\underline{x}(t)$, zum Zeitpunkt $t+Dt$ am Ort $\underline{x}(t+Dt)$. Die Ortsänderung ist der Vektor $d\underline{x}(t)$ mit den Koordinaten dx und dy.

Zwischen den Orten $\underline{x}(t)$ und $\underline{x}(t+Dt)$ erfahren Teilchen einen unendlich kleinen Zuwachs df. Man sagt dazu auch: ein Differential df. Es handelt sich um ein totales Differential, das sich als

$$(10) \quad df = df_x + df_y = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

beschreiben läßt. Darin sind df_x und df_y die Zuwächse in x- und in y-Richtung. Sie bilden zusammen den Gesamtzuwachs df. Wie in einer Geradengleichung ergibt sich df_x sich aus der örtlichen Änderung von f in x-Richtung $\partial f/\partial x$ und der Ortsänderung in x-Richtung dx. Ebenso ergibt sich df_y sich aus der örtlichen Änderung von f in y-Richtung $\partial f/\partial y$ und der Ortsänderung in y-Richtung dy. Zugleich sind $\partial f/\partial x$ und $\partial f/\partial y$ die beiden Koordinaten des Gradienten und dx und dy die beiden Koordinaten der Ortsänderung.

Wenn keine lokale Änderung der Ortsgröße $\partial f/\partial \tau$ vorliegt, ist die substantielle zeitliche Änderung rein konvektiv. Es gilt dann also wieder $a_f = Df/D\tau$.

Der örtliche Zuwachs df soll wieder gleichbedeutend mit dem zeitlichen Zuwachs Df sein, den ein Teilchen in der Zeit $D\tau$ erfährt. $D\tau$ ist dann die Zeit, in der sich ein Teilchen vom Ort $\underline{x}(t)$ zum Ort $\underline{x}(t+Dt)$ bewegt. In x-Richtung hat es sich dann um die Wegstrecke dx bewegt. Weil es das mit der Geschwindigkeit u tut, ist $D\tau$ auch gleich $u\ dx$. Ebenso gilt $D\tau = v\ dy$.

Aus Gleichung 11 wird so:

$$(11) \quad Df = \frac{\partial f}{\partial x}\, u\, D\tau + \frac{\partial f}{\partial y}\, v\, D\tau \qquad\qquad \frac{Df}{D\tau} = u\,\frac{\partial f}{\partial x} + v\,\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Das ist die konvektive zeitliche Änderung von f. Nimmt man noch die lokale Beschleunigung hinzu, ergibt sich für die substantielle Beschleunigung die Beziehung

$$(12) \quad \frac{Df}{D\tau} = \frac{df}{d\tau} + u\,\frac{\partial f}{\partial x} + v\,\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{Df}{D\tau} + (u, v) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Darin sind der Geschwindigkeitsvektor und der Gradient rechts bereits als Vektoren geschrieben. Die beiden Vektoren bilden zusammen ein Skalarprodukt. Mit den Symbolen der beiden Vektoren läßt sich Gleichung 12 auch schreiben als

$$(13) \quad \frac{Df}{D\tau} = \frac{df}{d\tau} + \underline{c} \cdot grad\, f.$$

Beide Vektoren können ebenso dreidimensional sein. Auch im Raum bleibt der Gradient die Richtung des stärksten Anstiegs. Zum Beispiel weist der Feuchtegradient am Rand einer Wolke ins Innere der Wolke.

Reynoldsches Transporttheorem für vektorielle Ortsgrößen

Bislang wurden die Ortsgrößen immer als ungerichtet betrachtet, wie es bei einer Temperatur ja auch der Fall ist, und als f aufgeschrieben. Allerdings gibt es auch gerichtete Ortsgrößen wie z.B. die Geschwindigkeit oder die Schubspannung. Sie werden als Vektoren $\underline{f}$ beschrieben mit den Koordinaten f_x, f_y und f_z. Das Transporttheorem bekommt für vektorielle Ortsgrößen die Form

$$(14) \quad D\underline{f}/Dt = d\underline{f}/dt + c \cdot grad\, \underline{f}.$$

Ausgeschrieben sind das drei Gleichungen. Sie lauten:

$$(15) \quad \begin{aligned} \frac{Df_x}{D\tau} &= \frac{df_x}{d\tau} + u\frac{df_x}{dx} + v\frac{df_x}{dy} + w\frac{df_x}{dz} \\ \frac{Df_y}{D\tau} &= \frac{df_y}{d\tau} + u\frac{df_y}{dx} + v\frac{df_y}{dy} + w\frac{df_y}{dz}\,. \\ \frac{Df_z}{D\tau} &= \frac{df_z}{d\tau} + u\frac{df_z}{dx} + v\frac{df_z}{dy} + w\frac{df_z}{dz} \end{aligned}$$

Reynoldsches Transporttheorem für die Position eines Teilchens

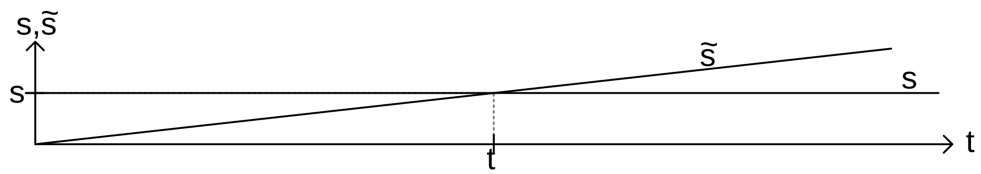

Bild 7: Zeitliche Änderung der Position

Auch die Position eines Teilchens ist eine Ortsgröße. Wenn sich Teilchen nur tangential bewegen können, kann ihre Position in Bahnlinienkoordinaten als $\tilde{s}$ beschrieben werden. Sie muß unterschieden werden vom Ort selbst, der weiter mit s bezeichnet wird (Bild 7).

Ein Teilchen verändert ausgehend von $\tilde{s} = 0$ seine Position mit der Zeit und erreicht zum Zeitpunkt τ einen Ort s. s ist auch davor und danach immer der gleiche Ort. Die Position $\tilde{s}$ des Teilchens ändert sich hingegen ständig und ist nur zum Zeitpunkt τ deckungsgleich mit dem Ort s.

Angewendet auf die Position eines Teilchens $\tilde{s}$, müßte das Transporttheorem liefern, daß die zeitliche Änderung $Ds/D\tau$ eines Teilchens seiner Geschwindigkeit entspricht.

Man sehe:

$$(16) \quad \frac{Ds}{D\tau} = \frac{ds}{d\tau} + c\,\frac{ds}{ds} = 0 + c * 1 = c\,.$$

Die lokale Änderung $ds/d\tau$ ist Null, weil s, anders als $\tilde{s}$, zeitlich konstant ist. ds/ds ist schon rein arithmetisch Eins. In einem Diagramm s über s wäre $s(s)$ die Winkelhalbierende und ds/ds ihre Steigung, also auch wieder Eins. $Ds/D\tau$ könnte auch $D\tilde{s}/D\tau$ geschrieben werden. Die substantielle Schreibweise mit großem „D" bringt aber selbst schon zum Ausdruck, daß es sich hier um die Position eines bewegten Teilchens handeln muß.

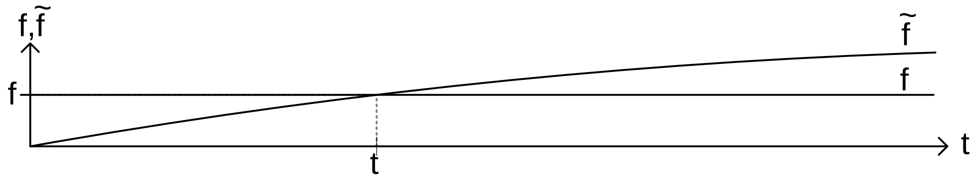

Bild 8: Zeitliche Änderung einer Ortsgröße aus Teilchen- und aus Ortssicht (stationär)

Genauso wie s in der substantiellen Ableitung als $\tilde{s}$ zu verstehen ist, ist auch jede andere Ortsgröße f in der substantiellen Ableitung eigentlich als $\tilde{f}$ zu verstehen (Bild 8). Ein bewegtes Teilchen erfährt einen zeitlichen Verlauf $\tilde{f}(\tau)$. Zu einem bestimmten Zeitpunkt τ erreicht es den zugehörigen Ort $s(\tau)$. Dort erfährt es einen Wert von $\tilde{f}$, der zu diesem Zeitpunkt auch örtlich als Wert von f gemessen werden kann.

Der lokale zeitliche Verlauf von f ist in Bild 8 konstant. Das ist der Sonderfall der Stationarität. Wenn f zeitlich nicht mehr konstant ist, entspricht das einer lokalen zeitlichen Änderung, die auch das Teilchen zusätzlich erfahren würde.

Die ortsbezogene Sichtweise hat den Vorteil, daß sie stationäre Verläufe und instationäre Vorgänge klar unterscheidet. Interessierende Zusammenhänge können ortsbezogen erst einmal als Gleichungen für den instationären Fall angegeben werden. In dieser Form haben sie die höchste Gültigkeit. Die Einschränkung auf den stationären Fall geschieht dann sehr einfach und übersichtlich durch Streichen der lokalen Änderung der Ortsgröße, man sagt auch: durch Streichen des instationären Terms.