Hagen-Poiseuille-Strömung

Laminare, stationäre Rohrströmung eines inkompressiblen Newtonschen Fluids

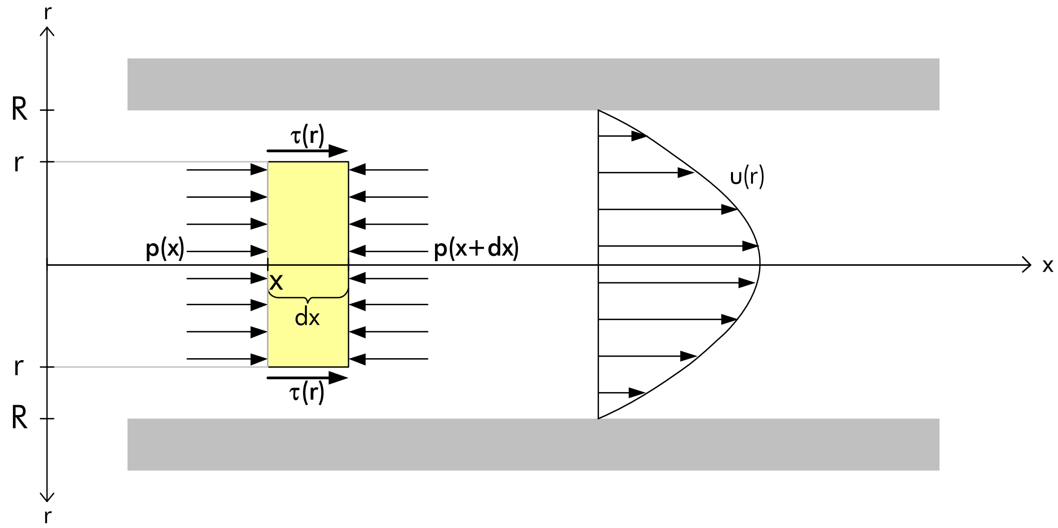


Bild 1: links Impulsbilanz, rechts Geschwindigkeitsprofil

Impulsbilanz

Aus einer stationären Rohrströmung eines inkompressiblen Newtonschen Fluids wird ein Zylinder mit dem Radius r und der infinitesimal kleinen Höhe dx ausgeschnitten. An diesem Zylinder wird eine Impulsbilanz gebildet.
Die zeitliche Ableitung des Impulses im Zylinder ist Null, weil es sich um eine stationäre Strömung handelt. Folglich müssen alle in den Zylinder hinein gerichteten bzw. eine Vermehrung des Impulses bewirkenden Transport- und Wandlungsströme zusammen Null ergeben. Weil die Impulsströme die Dimension einer Kraft haben, handelt es sich hier um ein Kräftegleichgewicht.
Wandlungsströme wären in diesem Fall Volumenkräfte. Als Volumenkraft käme hier nur die Gewichtskraft infrage. Es soll angenommen werden, daß ein waagerechter Abschnitt betrachtet wird. Weiterhin sollen nur die axiale Richtung, hier also die x-Richtung,betrachtet werden. Da die Gewichtskraft in dieser Richtung keine Komponente hat, spielt sie hier keine Rolle.

Die Transportströme müssen unterschieden werden in materielle Transporte (Konvektion) und in immaterielle Transporte (Konduktion). Die materiellen Transporte sind hier konvektive Impulsströme der Gestalt $\dot{m}\underline{c}$. Gemäß der Kontinuitätsgleichung , c A=konst., für ein inkompressibles Fluid ändern sich weder die Geschwindigkeit noch der Massenstrom zwischen den Stirnflächen des Zylinders. Es tritt daher kein resultierender materieller Transport in den Zylinder hinein auf.
Als einzig relevante Transporte verbleiben so die immateriellen Transporte. In einer Impulsbilanz sind sie gleichbedeutend mit Oberflächenkräften. Davon gibt es zwei Arten:
1. Die beiden Druckkräfte p(x) $r^2\pi$ und -p(x+dx) $r^2\pi$ auf die Stirnflächen des Zylinders.
2. Die Reibungskraft τ(r) 2 r π dx auf die Mantelfläche des Zylinders, wobei τ eine Schub- oder Scherspannung ist, die von r abhängt. Es gilt also das Kräftegleichgewicht

$$p(x)\, r^2 \pi - p(x+dx)\, r^2 \pi = \tau(r)\, 2\, r\, \pi\, dx.$$

Diese Gleichung läßt sich umformen in

$$\tau(r) = \frac{r}{2}\, \frac{p(x+dx) - p(x)}{dx} = \frac{r}{2}\, \frac{dp}{dx} \qquad (1)$$

Schubspannungsaufnahme τ(r)

Weil es sich um ein Newtonsches Fluid handeln soll, läßt sich die Schubspannungsaufnahme τ(r) auch ausdrücken als

$$\tau(r) = \eta\, \frac{du}{dr} \qquad (2)$$

Darin sind u(r) die axiale Geschwindikeit des Fluids im Radius r und η die dynamische Zähigkeit oder Viskosität.

Geschwindigkeitsprofil u(r)

(1) und (2) lassen sich zu einer Differentialgleichung verknüpfen:

$$\eta\, \frac{du}{dr} = \frac{r}{2}\, \frac{dp}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{dr} = \frac{dp}{dx}\, \frac{r}{2\,\eta}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$u(r) = \frac{dp}{dx}\, \frac{r^2}{4\,\eta} + C \qquad (3)$$

Die Konstante C kann aus der Randbedingung für r=R bestimmt werden. Bei R erreicht der Radius die Rohrwand. In der Rohrwand ist die Geschwindigkeit der Teilchen Null. Anders als in einem reibungsfreien Fluid bildet die Rohrwand hier keine Diskontinuitätsfläche. Wenn jedoch weiter die Kontinuumshypothese gilt, muß die Geschwindigkeit des Fluids an der Rohrwand ebenfalls Null sein. Es gilt also:

$$u(R) = \frac{R^2}{4\,\eta}\, \frac{dp}{dx} + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = \left(-\frac{dp}{dx}\right) \frac{R^2}{4\,\eta}$$

Damit wird aus (3):

$$u(r) = \frac{dp}{dx}\, \frac{r^2}{4\,\eta} + \left(-\frac{dp}{dx}\right) \frac{R^2}{4\,\eta}$$

Diese Gleichung läßt sich umformen zu

$$u(r) = \left(-\frac{dp}{dx}\right) \frac{R^2}{4\,\eta} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \qquad (4)$$

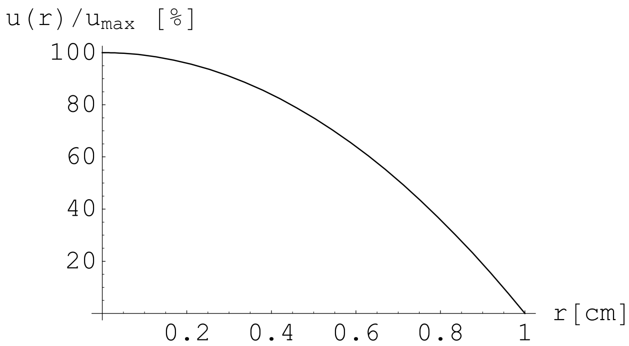
Offensichtlich tritt die größte Geschwindigkeit $u_{\max}$ bei r=0, also genau in der Mitte des Rohres, auf und lautet

$$u_{\max} = \left(-\frac{dp}{dx}\right) \frac{R^2}{4\,\eta}$$

Der Geschwindigkeitsverlauf läßt sich dann auch schreiben als

$$u(r) = u_{max}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

Für R=1cm und u_{max}=1 m/s sieht er folgendermaßen aus:



Das entspricht dem in Bild 1 rechts gezeigten Geschwindigkeitsprofil u(r).

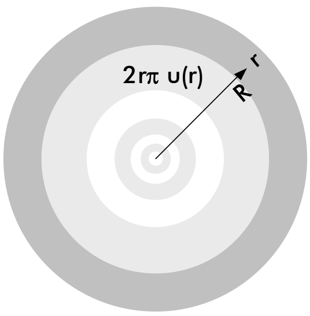
Volumenstrom $\dot{V}$

Um den Volumenstrom $\dot{V}$ zu erhalten, muß man u(r) über den gesamten Querschnitt integrieren. Das Flächenintegral ist dann der Volumenstrom. Wäre z.B. u(r)=U, also eine Konstante, müßte das Flächenintegral genau U $R^2\pi$ ergeben.

Die Querschnittsfläche des Rohres, welche ja $R^2\pi$ sein muß, ergibt sich aus dem Integral

$$\int_0^R 2\,r\pi\,dr$$

Man kann sich davon leicht überzeugen: Die Stammfunktion von $2r\pi$ ist $r^2\pi$. Setzt man die Integrationsgrenzen R und 0 ein ergibt sich der Querschnitt $R^2\pi$. Grafisch kann man sich das so vorstellen, daß mit der Integration über r ein kleiner Kreis , der zunächst nur der Mittelpunkt des Rohres ist, immer weiter aufgezogen wird, bis er zuletzt, bei r=R, den gesamten Querschnitt füllt.



Der Volumenstrom ergibt sich aus dem Integral $\int_0^R u(r)\,2\,r\pi\,dr$.
Setzt man (4) für u(r) ein, ergibt sich

$$\dot{V} = \int_0^R \left(-\frac{dp}{dx}\right) \frac{R^2}{4\eta} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) 2\, r\pi\, dr = \left(-\frac{dp}{dx}\right) \frac{R^2 \pi}{2\eta} \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) dr$$

$$= \left(-\frac{dp}{dx}\right) \frac{R^2 \pi}{2\eta} \left\langle \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4 R^2} \right\rangle_0^R = \left(-\frac{dp}{dx}\right) \frac{R^2 \pi}{2\eta} \left\langle \frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4} \right\rangle_0^R$$

Es ergibt sich also

$$\dot{V} = \left(-\frac{dp}{dx}\right) \frac{R^4 \pi}{8\eta} \qquad (5)$$

Mittlere Strömungsgeschwindigkeit c

Eine mittlere Geschwindigkeit c ergibt sich aus $\dot{V}$ nach Teilung durch die Querschnittsfläche $R^2 \pi$:

$$c = \left(-\frac{dp}{dx}\right) \frac{R^2}{8\eta} \qquad (6)$$

Wenn u(r) aus (4) durch diese Geschwindigkeit geteilt wird, ergibt sich ein auf die mittlere Geschwindigkeit bezogenes Geschwindigkeitsprofil u(r)/c:

$$u(r)/c = 2\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

Insbesondere gilt u(0), also $u_{\max} = 2c$. In der Rohrmitte ist die Geschwindigkeit also zweimal so groß wie im Mittel.

Druckverlust Δp_v

Für den Druckverlust Δp_v entlang einer Rohrstrecke L gilt

$$\Delta p_v = L\left(-\frac{dp}{dx}\right) \qquad (7)$$

Darin ist $\left(-\frac{dp}{dx}\right)$ der Druckgradient der Strömung. Das negative Vorzeichen bewirkt, daß p(x) größer als p(x+dx) ist. Nur so kann die Strömung in x-Richtung fließen, bei positivem Vorzeichen liefe sie rückwärts. Entlang einer Rohrstrecke L sinkt p(x) genau um den Betrag $L\left(-\frac{dp}{dx}\right)$. Das ist der Druckverlust Δp_v auf dieser Strecke, wenn ihre mittlere Fließgeschwindigkeit den Betrag c hat. Damit sie den Betrag c haben kann, muß der verfügbare Förderdruck Δp genau diesen Verlust decken. Ganz ähnlich wie bei einer Raumbeheizung die stationäre Heizleistung die Wärmeverluste decken muß, muß bei einer stationären Rohrströmung Δp gleich Δp_v sein.
Setzt man (6) in (7) und vewerndet statt des Radius R den Durchmesser D=2 R, ergibt sich Δp_v zu

$$\Delta p_v = \frac{32\,\eta\, L c}{D^2}$$

Der Druckverlust einer laminaren Strömung ist also proportional der Geschwindigkeit.