Kinetik mit Julia

Aufgabe: Drei über Seile verbundene Körper

Die Aufgabe findet sich im Lehrbuch im Abschnitt 8.2.

```
using Optim, Plots, BenchmarkTools
```

Wir rechnen ohne Einheiten. Sinnvollerweise notiert man sich alle Einheiten als Kommentar hinter den definierten Variablen. Die Erdbeschleunigung g ist in der Einheit $\mathrm{m/s^2}$ angegeben. Insofern ergeben sich alle Beschleunigungen ebenfalls in dieser Einheit.

Alternative Vorgehensweisen:

1. Mit Einheiten rechnen.
2. Alle Größen normieren (z. B. alle Beschleunigungen als Vielfache von g ausdrücken.

```
begin
    g = 9.81 #m/s^2
    m = 10.0 #kg
    m1 = 3*m
    m2 = 2*m
    m3 = m
end;
```

Kinematische Beziehung aufstellen

Typischwerweise wird man mit den drei y-Koordinaten der Lasten als generalisierten Koordinaten beginnen. Das System hat, wenn man undehnbare Seile unterstellt und ein Pendeln der Massen ausschließt, den Freiheitsgrad 2. Demnach muss es eine kinematische Beziehung zwischen den drei generalisierten Koordinaten geben. Hier wird die kinematische Beziehung auf Beschleunigungslevel notiert. Die zwei Minimalkoordinaten sind in einer Spaltenmatrix $\underline{q}$ zusammengefasst, wobei gilt $y_2 = q_1$ und $y_3 = q_2$. Die Größe y_1 wird als überzählige Koordinate durch die beiden anderen Größen ersetzt. Anmerkung: Die Buchstabenfolge tt in den Variablennamen weist auf die zweite Zeitableitung hin.

```
y1tt (generic function with 1 method)
```

```
y1tt(qtt) = -0.5*(qtt[1] + qtt[2])
```

Kinetik: Zwang aufstellen und Minimum suchen

Der Zwang $\mathcal{Z}$ wird als Funktion aller drei generalisierten Koordinaten aufgeschrieben. Die einzigen eingeprägten Kräfte sind die Gewichtskräfte der Lasten. Die Seilkräfte gehen nicht in den Zwang ein (solange nicht durch die Seile geschnitten wird).

```
Z (generic function with 1 method)
```

```
Z(qtt) = 0.5/m1*(m1*y1tt(qtt) - m1*g)^2 + 0.5/m2*(m2*qtt[1] - m2*g)^2 + 0.5/m3*
(m3*qtt[2] - m3*g)^2
```

Im folgenden sollen die Beschleunigungen mittels numerischer Minimierung des Zwangs $\mathcal{Z}$ bestimmt werden. Dazu wird ein Startwert für $\underline{\ddot{q}}$ benötigt. Wir probieren es mit den Beschleunigungen Null.

Hinweis: Selbstverständlich kann das Minimum von $\mathcal{Z}$ auch problemlos analytisch gefunden werden. Manchmal ist es aber bequemer, das Minimum automatisch, d. h. ohne weitere Anweisungen an den Computer, bestimmen zu lassen (mit einer numerischen Minimumsuche).

```
qtt_start = [0.0; 0.0];
```

Der Aufruf der Minimumsuche liefert nicht nur das Ergebnis für die gesuchten Beschleunigungen zurück (siehe unten), sondern eine Vielzahl an Informationen zur Minimumsuche

```
erg =  * Status: success

       * Candidate solution
          Final objective value:     2.717255e+03

       * Found with
          Algorithm:     Nelder-Mead

       * Convergence measures
          √(Σ(yᵢ-ȳ)²)/n ≤ 1.0e-08

       * Work counters
          Seconds run:   0  (vs limit Inf)
          Iterations:    48
          f(x) calls:    94
```

```
erg = optimize(Z, qtt_start)
```

Wenn die notwendige Rechenzeit bestimmt werden soll, kann dies so aussehen.

```
@btime optimize(Z, qtt_start);
```

```
44.300 μs (2276 allocations: 38.78 KiB)
```

In der Spaltenmatrix qtt_erg sind die Ergebnisse für $\ddot{y}_2$ und $\ddot{y}_3$ in der Einheit $\mathrm{m/s^2}$ enthalten.

```
qtt_erg = [2.8853, -4.03944]
```

```
qtt_erg = Optim.minimizer(erg)
```

Die berechneten Beschleunigungen sind wie oben erläutert in der Einheit $\mathrm{m/s^2}$.

Abgleich mit der analytischen Lösung

Die analytischen Ergebnisse sind $\ddot{y}_2 = 5/17g$, $\ddot{y}_3 = -7/17g$. Für den Vergleich mit den analytisch berechneten Werten können die Beschleunigungswerte anschließend mit 17/g multipliziert werden. Offensichtlich ergeben sich die bekannten Werte.

```
[5.00001, -7.00005]
```

```
qtt_erg*17/g
```

Schließlich kann noch $\ddot{y}_1$ aus der kinematischen Beziehung bestimmt werden.

```
0.5770724032841421
```

```
y1tt(qtt_erg)
```

```
1.0000235327044256
```

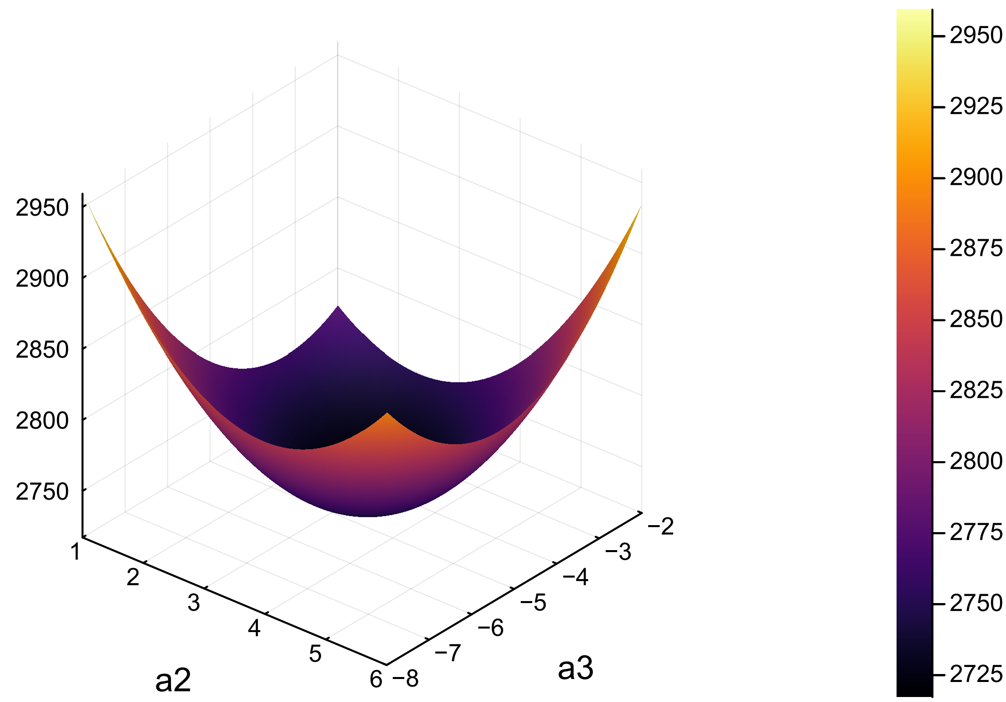
```
y1tt(qtt_erg)*17/g
```

Exkurs: Zwang als Funktion der Beschleunigungen plotten

In der Regel werden wir den Zwang $\mathcal{Z}$ nicht grafisch darstellen, da diese Darstellung keinen Mehrwert hat. Ausnahmsweise plotten wir den Zwang und überzeugen uns davon, dass die gefundenen Beschleunigungen den Zwang minimieren. Im unten stehenden Diagramm erkennt man, dass der Zwang $\mathcal{Z}$ ein globales Minimum an der zuvor berechneten Stelle hat.

```
f (generic function with 1 method)
```

```
f(x,y) = Z([x;y])
```




```
surface(1:0.1:6, -8:0.1:-2, f, xlabel = "a2", ylabel = "a3", camera = (40,
30),fontfamily="arial")
```

```
savefig("zwangparaboloid-dreikoerper-seile.svg");
```